

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

23. Band, Heft 5

2. Dezember 1940

S. 193—240

## Geschichtliches.

● **Dörrie, Heinrich:** *Triumph der Mathematik. Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur.* 2., erg. Aufl. Breslau: Ferdinand Hirt 1940. VII, 391 S. u. 112 Abb. RM. 7.—.

Ziel des Buches ist die Darstellung der berühmten Probleme der Elementarmathematik und vor allem der zu ihnen von den großen Mathematikern geleisteten Beiträge. Der Begriff „Elementarmathematik“ ist dabei erfreulich inhaltvoll gefaßt. Verf. hat mit großem Geschick 100 der reizvollsten Proben mathematischer Kleinkunst zusammengestellt, die in der Buntheit der Methoden bei sauber ausgefeilter Führung der Gedankengänge ein fesselndes Lehrbuch ergeben. Jedes Problem ist im einzelnen mit kurzen historischen und literarischen Bemerkungen versehen. — Den ersten Teil des Buches füllen arithmetische und analytische Aufgaben aus, u. a. eine interessante „elementare“ Ableitung der trigonometrischen und logarithmischen Reihe, das Buffon'sche Nadelproblem, der Unmöglichkeitsbeweis der Fermatschen Gleichung für  $n = 3$ , das quadratische Reziprozitätsgesetz, die Unlösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale, der Transzendenzbeweis für  $e$  und  $\pi$ ; in der neuen Auflage ist die André'sche Herleitung der Reihen für  $\sec x$  und  $\tan x$ , der die kombinatorische Deutung der Bernouillischen Zahlen mittels der Zickzackpermutationen zugrunde liegt, hinzugekommen. Die weiteren Abschnitte behandeln geometrische Probleme; das zweite Kapitel bespricht reizvolle planimetrische Aufgaben, u. a. das Problem von Mal'fatti, das Berührungsproblem des Apollonius, das reguläre Siebzehneck, die Mascheronischen Konstruktionen mit bloßem Zirkel (hier hielt Ref. eine Berücksichtigung der 125 Jahre früher liegenden Untersuchungen Georg Mohrendahls für angebracht), das dritte Kapitel handelt von Kegelschnitten und Zykloiden und erschöpft den reichen Schatz klassischer Konstruktionen und Sätze, der vierte Abschnitt enthält einige stereometrische Fragen, u. a. die Raumzerlegung durch Ebenen, den Pohlkeschen Satz, stereographische und Mercatorkarte; es folgt ein Kapitel mit nautischen und astronomischen Aufgaben, z. B. die Zeit- und Ortsbestimmungen nach Gauß' Zwei- und Dreihöhenmethode, Finsternisgleichung, Wechsel zwischen recht- und rückläufiger Planetenbewegung, die Keplersche Gleichung. Das letzte Kapitel bespricht einige weniger bekannte und methodisch fesselnde Extremumaufgaben, die zum größten Teil der Astronomie und dem Fragenkreis um die isoperimetrische Ungleichung entnommen sind.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Vygodskij, M.:** *Die Mathematik der alten Babylonier.* Uspechi mat. nauk. 7, 102—153 (1940) [Russisch].

**Bortolotti, Ettore:** *L'infinito e l'infinitesimo nella matematica antica.* Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, IX. s. 5, 147—159 (1938).

Gedrängter Überblick über die Entwicklung der Vorstellungen vom Unendlichgroßen und Unendlichkleinen bei den griechischen Denkern von den ersten Vorsokratikern bis zu Archimedes.

*Bessel-Hagen (Bonn).*

**Vogel, K.:** *Zur Geschichte der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.* Deutsche Math. 5, 217—240 (1940).

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Aufgaben, die sich bei Leonardo von Pisa im 5. Teil des XII. Kapitels des Liber abbaci finden. Während Leonardo sonst vielfach in der muslimischen Tradition steht, scheint es sich hier um byzantinisches Gut zu handeln; zu einzelnen Problemen findet sich Verwandtes schon bei Diophant. Entgegen der von Tropicke geäußerten Ansicht, daß lineare Gleichungssysteme bis



zum Ende des 15. Jahrhunderts einer methodischen Behandlung entbehren, kann der Verf. bei 3 Aufgabengruppen allgemeine Lösungsmethoden nachweisen. Bei Systemen der Form

$$s = x + \frac{a_1}{b_1} y = y + \frac{a_2}{b_2} z = \dots$$

spricht Leonardo die Lösungsvorschrift sogar für eine beliebige Anzahl von Unbekannten aus und gibt eine Begründung. Die Vorschrift ist im Wesen ein auf die Aufgabengruppe spezialisiertes Determinantenverfahren. Gelegentlich auftretende negative Lösungen werden als zulässig angesehen, wenn man sie als Schuld auffasse.

*Thaer* (Detmold).

**Fraiese, Attilio:** *L'algebra geometrica in Leonardo Pisano*. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 363—365 (1940).

Aus der Art der Erwähnung und Verwertung von einzelnen Stellen aus Euklids Elementen I bis VI in der *Practica geometricae* (1220) zeigt sich, daß Leonardo nicht bloß — wie bisher zumeist angenommen wurde — die Bearbeitung des Savasorda (*liber embadorum*, lateinisch etwa 1145 durch Plato von Tivoli), sondern auch das griechische Original vor sich gehabt haben muß. *Hofmann* (Berlin).

● **Armitage, Angus:** *Copernicus, the founder of modern astronomy*. São Paulo: Norton 1939. 183 pag. a. 37 fig. 3/-.

● **Rosen, Edward:** *Three Copernican treatises. The commentariolus of Copernicus, the letter against Werner, the narratio prima of Rheticus. Translated with introduction and notes by Edward Rosen. (Records of civilizati.: Sources a. studies. Nr. 30.)* New York: Columbia univ. press 1939. X, 211 pag. 3/-.

**Weiss, E. A.:** *Die kennzeichnende Eigenschaft des Österreichischen Fasses*. Deutsche Math. 5, 262—265 (1940).

Im Anschluß an Keplers Problemstellung in der Doliometrie (Linz 1615, 1616 = Opera ed. Ch. Frisch IV, V, Frankfurt-Erlangen 1863) untersucht Verf. den Rauminhalt eines Fasses, das sich aus zwei symmetrisch aneinandergesetzten Kegelstümpfen zusammensetzt, vom modernen Standpunkt aus. *J. E. Hofmann* (Berlin).

**Marian, Victor:** *Johann Binders Dissertation*. Gaz. mat. 45, 561—564 (1940) [Rumänisch].

Der Siebenbürger J. Binder wirkte seit 1793 bis zu seinem frühen Tod am evangelischen Gymnasium zu Hermannstadt. Er hatte in Göttingen bei A. G. Kästner studiert und schloß sich in seiner 16 Seiten starken „*Methodus inveniendi sinus arcuum n plicium, n numerum integrum seu fractum significante*“ (Hermannstadt 1797) ziemlich eng an Kästners Analysis des Unendlichen, § 175 an (1. Aufl. Göttingen 1760/61, 2. Aufl. 1770). Eigenartig ist der schrittweise Aufbau der Ausdrücke für  $\cos nx$  und  $\sin nx$  durch Zerlegen von  $(\cos x + \sin x)^n$  unter gleichzeitiger Änderung jedes zweiten Zeichens. *Hofmann* (Berlin).

**Fujiwara, M.:** *Miscellaneous notes on the history of chinese mathematics. Pt. 1.* Tôhoku Math. J. 46, 284—294 (1940) [Japanisch].

1. Der Verf. hat drei mathematische Werke der Min-Dynastie in China im Kabinettsarchiv gefunden, die bisher ganz unbekannt waren. Sie sind elementarer Natur; es ist aber zu bemerken, daß in diesen Büchern alle Rechenregeln durch Gedicht beschrieben sind, wie dies im 13. bis 16. Jahrhundert in China Brauch war. Verf. gibt ausführliche Erläuterungen dieser Bücher. 2. In den chinesischen mathematischen Büchern findet man manchmal einige Wahrsagungsprobleme von der folgenden Form: a) Eine Frau vom Alter  $a$  wurde im Monate  $b$  schwanger. Würde das Kind Sohn oder Mädchen sein? b) Ein Mann vom Alter  $a$  wurde krank im Monate  $b$ . Wird er von der Krankheit genesen oder nicht? Das erste Problem findet man in dem chinesischen Werke *Sonsi-sankei*, vor dem 6. Jahrhundert, während das zweite erst in einem japanischen Werke um 970, und in keinem chinesischen Werke vor 970 vorkommt. Daraus kann man schließen, daß einige Werke von China nach Japan kamen, aber



ganz verloren gegangen sind. Das erste Problem erscheint wieder in Sanpô-tô-sô 1593, und das zweite Problem in einem chinesischen Werke um 1450. Die erweiterte Auflage von Sanpô-Ketugisyo (1660), einem japanischen Werk, enthält auch diese zwei Probleme, aber die Lösungsmethode weicht etwas von derjenigen ab, welche bis dahin in der japanischen Literatur vorkommt. Verf. versucht durch die vergleichende Untersuchung dieser minderwertigen Probleme die Verbindung zwischen japanischer und chinesischer Mathematik zu klären.

*Fujiwara (Sendai).*

**Fujiwara, M.: Miscellaneous notes on the history of chinese mathematics. 2.** Tôhoku Math. J. 47, 35—48 (1940) [Japanisch].

Eine angenäherte Auflösungsmethode der numerischen algebraischen Gleichungen, welche der sog. Horner'schen Methode ähnlich ist, wurde in China schon vor dem 13. Jahrhundert gefunden, und ihre ausführliche Darstellung ist in dem Werke Susyokyûsyô von Sinkyusyo (1247) zu finden. Dieses Werk wurde aber nicht nach Japan eingeführt. Dagegen wurden zwei chinesische Werke, Yoki-sanpô und Sanpô-tô-sô, nach Japan importiert, welche, wenn auch unvollständig, von dieser Auflösungsmethode handelten. Es ist wohl bekannt, daß Tadakazu Seki die Yoki-sanpô studiert hat. Aus diesem Grund beschreibt der Verf. ausführlich den Inhalt von Yoki-sanpô. In diesem Werke wurden die quadratischen Gleichungen

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 - bx = c, \quad -ax^2 + bx = c \quad (a, b, c > 0)$$

durch nicht einheitliche Methoden behandelt, und das Lösungsverfahren für den Fall  $ax^2 - bx = c$  ( $a, b, c > 0$ ) ist ähnlich der Horner'schen Methode. *Fujiwara.*

**Fujiwara, M.: Miscellaneous notes on the history of Wazan. Pt. 3.** Tôhoku Math. J. 46, 295—308 (1940) [Japanisch].

Diese Note besteht aus den folgenden drei Teilen: 1. Das Problem der Bestimmung des Volumens der Kugel in der Zinkoki (1641) von M. Yosida. 2. Die Methode der sukzessiven Approximationen in der Sanpô-Hutudankai (1673). Die Auflösung der kubischen Gleichung  $x^3 - 14x^2 + 48 = 0$  durch die Iteration  $x_n = \left(\frac{1}{14}(48 + x_{n-1}^3)\right)^{\frac{1}{3}}$  und  $x_n = \left(\frac{48}{14 - x_{n-1}}\right)^{\frac{1}{3}}$  wurde in dem Werke Sanpô-Hutudankai 1673 angegeben.

Dies ist das erste Beispiel der Methode der sukzessiven Approximationen in der japanischen Mathematik. [Diese Bemerkung hat der Verf. dieser Note schon früher in Proc. imp. Acad. of Japan 15, 114—115 (1939); dies. Zbl. 22, 3 veröffentlicht.] 3. Die Sakuzyutu von Genkei Nakane. Die Sakuzyutu bedeutet in der japanischen Mathematik eine Lösungsmethode von Rekursionsformeln der Art:  $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + c$ . Der Verf. macht darauf aufmerksam, daß ein Manuskript von Genkei Nakane (1662 bis 1733), das bisher von niemand in Betracht gezogen wurde, die Sakuzyutu behandelt. Darin befand sich eine Bemerkung von Koike, einem Freund von Nakane, daß die Sakuzyutu überhaupt von Nakane herrührt, während sie bis jetzt auf T. Seki zurückgeführt wurde. Ein Problem im Manuskript von Nakane lautet wie folgt: Es seien  $a, b, c, S$  die drei Seiten und der Inhalt eines Dreiecks. Es ist gesucht eine Folge von Dreiecken, für die  $a, b, c, S$  ganzzahlig sind und  $c - b = 1, b - a = 1$  ist. Nakane gab als Antwort

$$a_{n+1} = 4a_n + 2 - a_{n-1}, \quad b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}, \quad c_{n+1} = 4c_n - 2 - c_{n-1}, \quad S_{n+1} = 14S_n - S_{n-1} \\ (a_0 = 1, \quad b_0 = 2, \quad c_0 = 3, \quad S_0 = 0).$$

Ein anderes Problem ist folgendes. Es sind gesucht die ganzzahligen Lösungen von  $a^2 + b^2 = c^2, b - a = 1$ . Die Antwort lautet:

$$a_{n+1} = 6a_n + 2 - a_{n-1}, \quad b_{n+1} = 6b_n - 2 - b_{n-1}, \quad c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}.$$

(Teil I. II. vgl. dies. Zbl. 22, 99.)

*Fujiwara (Sendai).*

**Fujiwara, M.: Miscellaneous notes on the history of Wazan. 4.** Tôhoku Math. J. 47, 49—57 (1940) [Japanisch].

In dieser Note wird die Auflösungsmethode der numerischen algebraischen Gleichungen



chungen, die Takakazu Seki in seinem Werke Kaihō-sansiki gegeben hat, erläutert. Diese Methode ist ganz identisch mit der sog. Horner'schen Methode, die Horner erst 1819 veröffentlicht hat. T. Seki verdankt die Idee der unvollständigen Methode der Schrift Yoki-sanpō (1275), hat sie aber zu einem einheitlichen allgemeinen Verfahren entwickelt. Der Verf. macht auch darauf aufmerksam, daß in demselben Werke von Seki die Newtonsche Methode der sukzessiven Approximationen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung inhaltlich vorkommt. In moderner Sprechweise hat Seki die Gleichung  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$  durch  $x = y + \alpha$  ( $\alpha$  ist die erste Approximierte der Wurzel) in  $f(y + \alpha) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0$  transformiert und bemerkt, daß dabei

$$b_n = f(\alpha), \quad b_{n-1} = f_1(\alpha) = n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

ist. Seki bemerkte aber nicht, daß  $f_1(x)$  die Ableitung von  $f(x)$  ist. Daraus leitete er  $\beta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f_1(\alpha)}$  als die zweite Approximierte der Wurzel, und  $\gamma = \beta - \frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}$  als die dritte usw. ab, was nichts anderes als die Newtonsche Methode ist. *Fujiwara.*

**Minoda, Takashi:** On „Katuyō Sampō, book 3“ of Takakazu Seki. Tōhoku Math. J. 47, 99—109 (1940) [Japanisch].

In dem hinterlassenen Werke, Katuyō-sampō (1712) von Takakazu Seki findet man ein Kapitel, das von den regelmäßigen Polygonen handelt. Darin sind die Gleichungen, welche zwischen der Seitenlänge eines regelmäßigen  $n$ -seitigen Polygons, dem Radius des Umkreises und dem Radius des Inkreises bestehen, für die Fälle  $n = 3, 4, 5, \dots, 20$ , zu finden. Verf. dieser Note erläutert die Methode des Katuyō-sampō an den beiden Fällen  $n = 11, 17$ ; ferner gibt er die vollständige Berichtigung der Druckfehler in Katuyō-sampō und auch in dem anderen Werke von Seki, das als Urschrift des Katuyō-sampō diente. *Fujiwara (Sendai).*

**Hofreiter, Nikolaus:** Nachruf auf Philipp Furtwängler. Mh. Math. Phys. 49, 219—227 (1940).

Biographie mit Schriftenverzeichnis.

*H. Geppert (Berlin).*

**Glagolev, N. A.:** Maurice Ocagne (1862—1938). Uspechi mat. nauk. 7, 322—326 (1940) [Russisch].

**Hagstroem, K.-G.:** Reinhold Palmqvist †. Skand. Aktuarie Tidskr. 23, 62—65 (1940).

Biographie mit Schriftenverzeichnis.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Tschebotarev, N. G.:** Samuil Osipowitsch Schatunowskij. (Zum zehnjährigen Todestag.) Uspechi mat. nauk. 7, 316—321 (1940) [Russisch].

**Gheorghiu, Gh. Th.:** George Țițeica. Gaz. mat. 45, 281—288, 339—344, 396 bis 405 u. 452—457 [Rumänisch].

**Lony, Gustav:** Die Mathematische Gesellschaft in Hamburg in den Jahren 1890 bis 1940. Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Tl 1, 7—41 (1940).

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

**Witt, Ernst:** Ein Identitätssatz für Polynome. Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Tl. 2, 188—189 (1940).

Funktionentheoretischer Beweis eines vom Ref. algebraisch bewiesenen Satzes (dies. Zbl. 16, 99; 21, 99).

*Rohrbach (Berlin-Nikolassee).*

**Mătieș, I. V.:** Beiträge zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Gaz. mat. 45, 565—571 (1940) [Rumänisch].

Verf. setzt zur Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades in  $x$  zwei Gleichungen  $y = \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}$  und  $y^2 + m y + n = 0$  an, erhält aus diesen durch Elimination von  $y$  eine Gleichung vierten Grades in  $x$ , identifiziert diese mit der gegebenen Gleichung und ver-



gleich die Koeffizienten. Nach einigen Vereinfachungen erhält er eine kubische Resolvente für den allgemeinen Fall  $a_2 \neq 0$ . Er untersucht dann weiter die beiden Sonderfälle  $a_2 = 0$ ,  $b_2 \neq 0$  und  $a_2 = b_2 = 0$ ,  $c_2 \neq 0$ . Ist  $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$  die gegebene Gleichung, so führt der erste Sonderfall auf die Bedingung  $AD^2 - B^2E = 0$ , der zweite auf  $B^3 + 8A^2D - 4ABC = 0$ .  
*Max Zacharias* (Berlin).

**Landherr, W.:** Algebraischer Beweis eines Satzes aus der Matrizenrechnung. *Mh. Math. Phys.* **49**, 197—198 (1940).

Der Satz wurde von Radon mit Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen (dies. Zbl. **21**, 291).  
*Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

**Oldenburger, Rufus:** Infinite powers of matrices and characteristic roots. *Duke math. J.* **6**, 357—361 (1940).

Sei  $A$  eine komplexe Matrix,  $A^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ . Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz und speziell für das Nullwerden von  $A^\infty$ . Anschließend werden einige Sätze über die Lage der charakteristischen Wurzeln von Matrizen abgeleitet, insbesondere Sätze von Frobenius und von Hirsch einfacher bewiesen.  
*Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

**Specht, Wilhelm:** Klassifikation der halblinaren Transformationen. *Math. Z.* **46**, 637—649 (1940).

Die Klassifikation der halblinaren Transformationen in einem Körper der Charakteristik 0 für einen Automorphismus endlicher Ordnung ist mehrfach durchgeführt worden (siehe Jacobson, dies. Zbl. **13**, 146; Haantjes, dies. Zbl. **17**, 53; Nakayama, dies. Zbl. **17**, 3; Asano und Nakayama, dies. Zbl. **18**, 4). Die Aufgabe kann auf folgende rein matrizentheoretische Fragestellung zurückgeführt werden: Es sei  $Z$  zyklisch über dem Körper  $k$  der Charakteristik 0,  $[Z:k] = m$ , und  $S$  ein erzeugender Automorphismus von  $Z/k$ . Zwei in  $Z$  rationale Matrizen  $A, B$  heißen  $S$ -ähnlich, wenn eine in  $Z$  rationale, reguläre Matrix  $P$  gleichen Grades existiert, so daß  $P^{-1}AP^S = B$  ist. Gesucht sind kennzeichnende Invarianten der Klassen  $S$ -ähnlicher Matrizen. — Es sei  $N_\lambda(A) = A^{1+S+\dots+S^{\lambda-1}}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots$ ) und  $r_\lambda(A) = \text{Rang } N_\lambda(A)$ . Dann gilt:  $r_1(A), \dots, r_n(A)$  und die Elementarteiler von  $N_m(A)$  bilden ein vollständiges Invariantensystem. Die bisherigen Beweise verwenden allgemeine abstrakte algebraische Hilfsmittel (Köthesche Theorie der einreihigen Ringe, Studium der  $p$ -adischen Erweiterungen  $Z^*(x)_p$ , wo  $Z^*(x)$  der Quotientenkörper des Polynomringes  $Z^*[x]$  bedeutet, in welchem  $x\alpha = \alpha^S x$  mit  $\alpha \in Z$  ist). Verf. zeigt, daß die üblichen Methoden der Matrizentheorie für die Lösung der Aufgabe durchaus ausreichen. Die Arbeit gliedert sich naturgemäß in die Behandlung der beiden Fälle einer regulären und einer singulären Matrix. Im zweiten Falle macht Verf. vom folgenden interessanten Satz Gebrauch: Ist die charakteristische Funktion der Norm von  $A$  von der Gestalt  $|xE - N_m(A)| = f_1(x)f_2(x)$  und sind  $f_1(x), f_2(x)$  zwei teilerfremde Polynome in  $k$ , so kann man zu  $A$  eine  $S$ -ähnliche Matrix  $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$  angeben, so daß die Gleichungen  $|xE - N_m(B_i)| = f_i(x)$  ( $i=1, 2$ ) bestehen.  
*H. L. Schmid* (Berlin).

**Turri, T.:** Condizioni per la identità proiettiva di antiomografie. *Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **10**, 1—15 (1940).

Verf. beweist: Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei durch die Matrizen  $A$  und  $B$  dargestellte Antihomographien projektiv identisch seien, ist, daß die charakteristischen Wurzeln der Matrix  $\|B\bar{B} - \varrho I\|$  aus denen der Matrix  $\|A\bar{A} - \varrho I\|$  durch Multiplikation mit einer reellen positiven Konstante erhalten werden. — Der Beweis knüpft an einige vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **22**, 195) erhaltene Ergebnisse an, auf Grund deren man beweisen kann, daß jede Antihomographie in elementare Antihomographien zerlegbar ist, die sich in drei Typen klassifizieren lassen und durch das Verhalten ihrer Quadrate gekennzeichnet sind. Man beweist daher den Satz zunächst für diese elementaren Antihomographien, wobei die Tatsache eine Rolle spielt, daß man mittels linearer Substitutionen die Matrix jeder Antihomographie in eine reelle Matrix transformieren kann. — Weitere Bemerkungen des Verf. beziehen



sich auf projektiv unterschiedene Antihomographien, deren Quadrate projektiv identisch sind; in diesem Falle erhält man die charakteristischen Wurzeln der Matrix  $\|B\bar{B} - \varrho I\|$  aus denen der Matrix  $\|A\bar{A} - \varrho I\|$ , indem man sie mit einer notwendigerweise nicht reellen und positiven Konstanten multipliziert. Beispiele aus dem gewöhnlichen  $S_3$  beleuchten die Ergebnisse. *L. Campedelli (Firenze).*

**Rados, Gustav: Vertauschbare Hermitesche Matrizen und die zugehörigen Hermite-schen Formen.** Mat. természett. Értes. 59, Tl 1, 1—4 u. deutsch. Zusammenfassung 5—6 (1940) [Ungarisch].

Die Faltung zweier vertauschbarer definiter Hermitescher Formen ist stets eine definite Hermitesche Form. Die Faltung zweier vertauschbaren Hermiteschen Formen, von denen entweder beide definit sind oder die eine definit und die andere semidefinit ist, ist eine semidefinite Hermitesche Form, deren Rang höchstens dem Produkte der Rangzahlen der Komponenten gleich ist. *Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).*

**McGavock, William G.: Annihilators of quadratic forms with applications to Pfaffian systems.** Duke math. J. 6, 462—473 (1940).

Sind  $F \neq 0$ ,  $G \neq 0$  Formen im Grassmannschen Ringe  $\mathfrak{G}$  und ist  $FG = 0$ , so wird  $F$  Annihilator von  $G$  genannt. Den Schwerpunkt der Arbeit bildet der Beweis des folgenden Satzes: Wenn für quadratische Formen  $F, G$  und lineare Formen  $\omega_1, \dots, \omega_r$  in  $\mathfrak{G}$  die Beziehungen  $\Omega F^\lambda G^{e-\lambda+1} = 0$  ( $\lambda = 0, \dots, \varrho + 1$ ),  $\Omega F^e \neq 0$ ,  $\Omega G^e \neq 0$  bestehen, wobei  $\Omega$  das Produkt  $\omega_1 \dots \omega_r$  bedeutet, so werden die  $\Omega F$  und  $\Omega G$  von einem Produkte von  $\varrho$  linearen Formen in  $\mathfrak{G}$  gleichzeitig annulliert. Dieser Satz wird zu Untersuchungen über Beziehungen zwischen den Invarianten Pfaffscher Systeme, und zwar der Dimension ( $r$ ), Klasse ( $p$ ), Spezies ( $\sigma$ ) und des Halbranges ( $\varrho$ ), verwendet. Beweis der Ungleichung  $\sigma \leq 2\varrho + r - 1$ ; Konstruktion von Pfaffschen Systemen mit  $r > 2$ ,  $\varrho \leq \sigma \leq 2\varrho$ ,  $p = 5\varrho + r - \sigma$ . *O. Borůvka.*

### **Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:**

**Ore, Oystein: Remarks on structures and group relations.** Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 1—4 (1940).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß drei Elemente eines beliebigen Verbandes einen Dedekindschen bzw. distributiven Teilverband erzeugen. Anwendungen auf die Verbände aus den Untergruppen einer Gruppe. So gilt z. B., daß in jeder Gruppe zwei Normalteiler und eine beliebige dritte Untergruppe stets einen Dedekindschen Teilverband erzeugen. *G. Köthe.*

**MacLane, Saunders: Modular fields.** Amer. Math. Monthly 47, 259—274 (1940).

Eine Gesamtübersicht über alte und neue Sätze und Fragestellungen in der Theorie der Körper mit Charakteristik  $p$ , unter besonderer Berücksichtigung der inseparablen Körpererweiterungen. *van der Waerden (Leipzig).*

**Teichmüller, Oswald: Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation  $\tilde{s}_{\lambda, \mu, \nu} \tilde{s}_{\lambda, \mu, \nu}^\lambda \pi \tilde{s}_{\mu, \nu}^\lambda \pi = \tilde{s}_{\lambda, \mu, \nu \pi} \tilde{s}_{\lambda, \mu, \nu}^\lambda \pi$ .** Deutsche Math. 5, 138—149 (1940).

$K$  sei ein Schiefkörper endlichen Ranges über  $P$ , und  $\mathfrak{Z}$  sei der Unterkörper aller bei allen Automorphismen von  $K/P$  fest bleibenden Elemente.  $\mathfrak{Z}$  ist natürlich im Zentrum  $Z$  von  $K$  enthalten. Nun gilt folgende Verallgemeinerung eines Hauptsatzes der Galoisschen Theorie: Ordnet man jedem Zwischenkörper  $X$  zwischen  $\mathfrak{Z}$  und  $K$  die Gruppe  $g$  derjenigen Automorphismen zu, die  $X$  elementweise fest lassen, so ist  $X$  umgekehrt die Gesamtheit der Elemente von  $K$ , die bei  $g$  fest bleiben. Ist insbesondere  $\mathfrak{Z} = P$ , so kann man für  $X$  jeden Zwischenkörper zwischen  $P$  und  $K$  nehmen. Dazu ist notwendig und hinreichend: 1. daß  $Z$  über  $P$  galoissch und separabel ist, 2. daß jeder Automorphismus von  $Z/P$  sich zu einem Automorphismus von  $K$  fortsetzen läßt. Hat  $K$  die Eigenschaft 2, so hat auch ein beliebiger voller Matrixring  $A$  über  $K$  die Eigenschaft 2 und umgekehrt. Nun wird gefragt, wie sich diese Eigenschaft am Faktorensystem von  $A$  auswirkt. Als Zerfällungskörper wird ein  $Z$  umfassender, über  $P$



galoisscher und separabler Körper  $S$  gewählt; das Faktorensystem sei  $\alpha_{\sigma, \sigma}$ . Dann bedeutet die Eigenschaft 2, daß gewisse Quotienten aus den  $\alpha_{\sigma, \sigma}$  und ihren Konjugierten sich auf die Gestalt  $c_{\sigma} c_{\tau}^{-1}$  bringen lassen, also je ein zerfallendes Faktorensystem bilden. Die Algebrenklassen mit dieser Eigenschaft bilden eine Untergruppe der Algebrenklassengruppe. Diese enthält wieder eine Untergruppe, bestehend aus den Algebren  $A$ , die sich in einfache Algebren  $B$  mit Zentrum  $P$  einbetten lassen derart, daß  $A$  aus allen mit  $Z$  elementweise vertauschbaren Elementen von  $B$  besteht. Zu jeder Algebrenklasse der erstgenannten (größeren) Untergruppe läßt sich in  $Z$  ein System von Elementen  $\xi_{\lambda, \mu, \nu}$  eindeutig bis auf Multiplikation mit  $\kappa_{\lambda, \mu} \kappa_{\lambda, \mu, \nu} (\kappa_{\mu, \nu}^{\lambda} \kappa_{\lambda, \mu, \nu})^{-1}$  definieren, für das immer die im Titel genannte Relation gilt, derart daß  $\xi_{\lambda, \mu, \nu} = \kappa_{\lambda, \mu} \kappa_{\lambda, \mu, \nu} (\kappa_{\mu, \nu}^{\lambda} \kappa_{\lambda, \mu, \nu})^{-1}$  dann und nur dann, wenn die Algebrenklasse zur kleineren Untergruppe gehört (d. h. wenn ihre Algebren sich in der angegebenen Weise einbetten lassen). Ist  $Z$  zyklisch, so fällt die größere Untergruppe mit der kleineren zusammen.

van der Waerden (Leipzig).

● Albert, A. Adrian: Structure of algebras. (Amer. math. Soc. Coll. Publ. Vol. 24.) New York: Amer. Math. Soc. 1939. XII, 210 pag. \$ 4.—

Shaw, James Byrnie: Algebras defined by groups whose members are of the form  $A^x B^y$ . Duke math. J. 5, 839—855 (1939).

In dieser Note beschäftigt sich Verf. mit Gruppen, die aus den Elementen von der Gestalt  $A^x B^y$  erzeugt werden. Für solche Gruppen wird die Reduktion des Gruppenringes ausgeführt, was theoretisch schon in der allgemeinen Theorie bekannt ist. Die angegebenen vielen Beispiele werden für die weiteren Untersuchungen des Gruppenringes nötig sein.

K. Shoda (Osaka).

Mori, Shinziro: Über die Produktzerlegung der Hauptideale. 3. J. Sci. Hiroshima Univ. A 10, 85—94 (1940).

In Verallgemeinerung früherer Ergebnisse [vgl. J. Sci. Hiroshima Univ. A 9, 145 (1939); Referat folgt; Teil I vgl. dies. Zbl. 18, 200] wird bewiesen:  $R$  sei ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jedes Hauptideal als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist.  $R$  ist dann die direkte Summe endlich vieler Ringe  $R_i$  mit Einselementen, die entweder Integritätsbereiche oder primäre Ringe sind. Im zweiten Fall ist das einzige Primideal ein Hauptideal, im ersten brechen für jedes Hauptideal  $(a)$  die Idealquotientenketten  $(a):a_1 \subset (a):a_2 \subset (a):a_3 \subset \dots$  stets ab, und jedes höchste Primideal eines beliebigen Hauptideals ist stets umkehrbar. Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung.

G. Köthe (Münster i. W.).

Pall, Gordon: On the arithmetic of quaternions. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 487—500 (1940).

Eine Quaternion  $t = t_0 + i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3$  heißt eigentlich mod  $m$ , wenn  $(t_0, t_1, t_2, t_3, m) = 1$ . Zuerst wird ein neuer Beweis für den Satz gegeben: Wenn die Quaternion  $v$  eigentlich mod  $m$  ist,  $m/\text{Norm}(v)$ ,  $m$  ungerade und positiv, dann hat  $v$  genau 8 linksassozierte Rechtsteiler mit der Norm  $m$ . Hierauf werden die Beziehungen

zwischen der Gleichung  $m = \sum_{i=0}^3 t_i^2$  und der Kongruenz  $\sum_{i=1}^3 v_i^2 \equiv 0 \pmod{m}$  klargestellt.

Es werden dann Bedingungen angegeben, daß Quaternionen dieselben Teiler mit gegebener Norm haben. Mit Hilfe von Quaternionen werden schließlich bekannte Beziehungen abgeleitet, die zwischen der Klassenzahl binärer quadratischer Formen und den Darstellungen von ternären Formen bestehen.

N. Hofreiter (Wien).

### Zahl- und Funktionenkörper:

Humbert, Pierre: Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique  $K$  fini. Comment. math. helv. 12, 263—306 (1940).

Verf. überträgt die Theorie von Minkowski über die arithmetische Äquivalenz der quadratischen Formen ins Algebraische. Gegeben sei ein endlicher algebraischer



Zahlkörper  $K$  vom Grade  $g$  über dem Körper der rationalen Zahlen und eine natürliche Zahl  $n \geq 2$ . Große und kleine deutsche Buchstaben bezeichnen Matrizen vom Typus  $n$ -mal  $n$  bzw.  $n$ -mal 1 (wenn nichts anderes gesagt wird) mit ganzen Elementen in  $K$ . Für eine beliebige Matrix  $x$  bedeutet  $\bar{x}$  und  $x'$  die konjugiert komplexe bzw. transponierte. Es wird nach Siegel  $\mathfrak{S}[x] = x' \mathfrak{S} \bar{x}$  gesetzt. Die Konjugierten von  $K$  seien  $K^{(1)}, \dots, K^{(g)}$ , so daß  $K^{(k)} (k = 1, \dots, g_1)$  reell,  $K^{(g_1+k)}, K^{(g_1+g_2+k)} (k = 1, \dots, g_2)$  konjugiert komplex sind ( $g = g_1 + 2g_2$ ). Es sei  $\gamma = g_1 + g_2$ . Wird ein deutscher Buchstabe mit einem oberen Index versehen wie  $\mathfrak{A}^{(k)}$ , so liegt die Matrix in  $K^{(k)}$ . Was immer  $x$  bedeutet, sind  $x^{(1)}, \dots, x^{(g)}$  die entsprechenden Konjugierten, ausgenommen  $x = \mathfrak{S}$ . Eine Folge  $\mathfrak{S}^{(k)} (k = 1, \dots, \gamma)$  von Hermiteschen (für  $k = 1, \dots, g_1$  symmetrischen) Matrizen wird ein System  $S$  genannt, wenn die entsprechenden Hermiteschen (für  $k = 1, \dots, g_1$  quadratischen) Formen in  $K^{(k)}$  positiv definit sind. Ist  $\mathfrak{U}$  unimodular ( $|\mathfrak{U}| = \text{Einheit in } K$ ), so heißt das transformierte System  $\mathfrak{S}^{(k)}[\mathfrak{U}^{(k)}] (k = 1, \dots, \gamma)$  (kurz  $S[\mathfrak{U}]$ ) äquivalent zu  $S$ . Es sei  $\mathfrak{S} = (s_{ij})$ . Deutet man die Real- und

Imaginärteile von  $s_{ij}^{(k)} (1 \leq i \leq j \leq n; k = 1, \dots, \gamma)$  als Koordinaten im  $\left(\frac{n}{2}(ng + g_1) - \text{dimensionalen}\right)$  Euklidischen Raum, den man zugrunde gelegt denkt, so bilden die Punkte  $S$  eine Punktmenge  $P$ . Verf. stellt das Problem, über zwei Systeme  $S_1, S_2$  zu entscheiden, ob sie äquivalent sind, und löst es, indem er den Fundamentalbereich bezüglich der Gruppe aller  $\mathfrak{U}$  bestimmt. Der soll ein Gebiet sein, das zu jedem Punkt  $S$  einen äquivalenten enthält und nur dann mehr als einen, wenn es sich um Randpunkte handelt. Die darin enthaltenen  $S$  heißen reduziert. Es erweisen sich die  $\mathfrak{F} = \omega \mathfrak{E}$  ( $\omega = \text{Einheit}$ ,  $\mathfrak{E} = \text{Einheitsmatrix in } K$ ) leicht als die einzigen Matrizen  $\mathfrak{U}$ , mit denen  $S[\mathfrak{U}] = S$  für alle  $S$  gilt. Den folgenden Betrachtungen wird ein Lemma an die Spitze gestellt: Nimmt man die  $\mathfrak{S}$  entsprechende Form in der üblichen Gestalt  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$  an und setzt  $\tau x = \sum_{k=1}^{\gamma} x^{(k)}$  („Spur“ von  $x$ ), so gibt es zu gegebenem  $\mathfrak{S}$  nur endlich viele  $\mathfrak{x}$  so,

daß  $\tau \mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$  unter einer gegebenen Schranke bleibt. (Hätte man statt  $S$  und  $K^{(1)}, \dots, K^{(g)}$  nur  $\mathfrak{S}$  und  $K$  betrachtet, so gälte ein ähnliches Lemma nicht und könnte ein „Fundamentalbereich“ kein Gebiet mehr sein.) Die Reduktion von  $S$  erfolgt durch zwei Transformationen. Hilfsmatrix von  $S$  heißt eine reguläre (nicht notwendig unimodulare)

Matrix  $\mathfrak{A}$ , wenn für das transformierte System  $\tilde{S}$  der  $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}[\mathfrak{A}] = (\tilde{s}_{ij})$  (die oberen Indizes  $(k)$  wurden weggelassen) vor allem  $\tau \tilde{s}_{11}$ , dabei noch  $\tau \tilde{s}_{22}, \dots$ , endlich dabei noch  $\tau \tilde{s}_{nn}$  minimal ist und gewisse einfache weitere Bedingungen stattfinden (erste Transformation). Umgestaltet lauten diese zwei Bedingungen: (I)  $\tau(\tilde{s}_{ll}) \leq \tau(\tilde{\mathfrak{S}}[\mathfrak{h}])$  für alle nicht notwendig ganzen  $\mathfrak{h} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ , für die  $\mathfrak{A}\mathfrak{h}$  ganz ist und  $\eta_l, \dots, \eta_n$  nicht alle verschwinden ( $l = 1, \dots, n$ ), (II)  $-\frac{\pi}{w} \leq \arg \tilde{s}_{1l}^{\omega} \leq \frac{\pi}{w}$ , wobei  $w$  die Anzahl

der  $\omega$  ist ( $l = 2, \dots, n$ ). Die Hilfsmatrix ist bis auf einen Faktor  $\mathfrak{F}$  eindeutig bestimmt. Nun werde in (I), (II) ein beliebiges (ganzes) reguläres  $\mathfrak{A}$  gemeint. Erst im Satz 7 wird bewiesen, daß alle Ungleichungen (I) aus einer endlichen Anzahl von ihnen folgen. So ergibt sich, daß all die (I), (II) genügenden  $\tilde{s}_{ij}^{(k)}$  ein Gebiet  $R(\mathfrak{A})$  definieren, das ein konvexer Winkelraum ist, begrenzt von endlich vielen durch den Nullpunkt gehenden Flächen. Auch gilt  $R(\mathfrak{U}\mathfrak{A}) = R(\mathfrak{A})$ , wenn  $\mathfrak{U}$  unimodular ist. Gestützt auf Minkowskis Satz über die linearen Formen gewinnt man Satz 1: Es ist  $\text{Norm}(|\mathfrak{A}|) \leq c$  für alle Hilfsmatrizen, wobei  $c$  nur von  $K$  und  $n$  (nicht aber von  $S$ ) abhängt. Satz 2 besagt weiter, daß sich alle  $\mathfrak{A}$  in der Gestalt  $\mathfrak{U}\mathfrak{A}_1$  schreiben lassen, wobei  $\mathfrak{U}$  unimodular ist und  $\mathfrak{A}_1$  einer endlichen Menge  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_N$  angehört, die wieder nur von  $K$  und  $n$  abhängt. Das transformierte System  $\tilde{S}$  der  $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}[\mathfrak{A}_1^{-1}]$  (zweite Transformation) ist reduziert. Läßt man hier für  $\tilde{S}$  alle Punkte von  $R(\mathfrak{A}_1)$  zu, so entsteht wieder ein Gebiet  $R_1$  mit ähnlichen Eigenschaften. Nach Satz 3 ist der Durchschnitt  $R = P \cap R_1 + \dots + R_N$  ein Fundamentalbereich. Nach Satz 5 läßt sich jeder Randpunkt  $S$  von  $R$  durch eine



unimodulare Matrix  $U (\neq \mathfrak{I})$  wieder in einen Randpunkt  $T$  transformieren und nach Satz 6 kommt man für alle Paare  $S, T$  mit endlich vielen  $U$  aus. Als Anwendung folgt der Satz von Hurwitz, daß die Gruppe der unimodularen Matrizen  $U$  in  $K$  eine endliche Anzahl Erzeugende hat. Für sie kann man die  $U$  aus Satz 6 und die  $\mathfrak{I}$  nehmen.

*L. Rédei* (Budapest).

**Hasse, H.:** Produktformeln für verallgemeinerte Gaußsche Summen und ihre Anwendung auf die Klassenzahlformel für reelle quadratische Zahlkörper. *Math. Z.* **46**, 303—314 (1940).

Die Schwierigkeiten, die auftreten, wenn man die Klassenzahl eines reellen quadratischen Zahlkörpers nach der Dirichletschen Formel berechnen will, führen darauf, gewisse verallgemeinerte Gaußsche Summen zu betrachten:

$$\tau_a(\psi_m) = \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}^m} \psi_m(x) e^{\frac{2\pi i}{p} Sp(ax)},$$

wobei  $a$  eine feste Zahl  $\neq 0$  aus einem endlichen Körper der Charakteristik  $p$  und  $\psi_m$  ein Charakter der Gruppe  $\mathfrak{G}^m$  aller  $m$ -ten Potenzen  $\neq 0$  aus diesem Körper ist, sowie die Produkte  $\prod \tau_r(\psi_m)$ , wobei  $r$  ein Repräsentantensystem eines Elementes der von

$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^m$  nach  $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{G}^m$  gebildeten Faktorgruppe durchläuft, durch genaueres Eingehen auf ihre gruppentheoretische Struktur auszumultiplizieren. Die sich hierbei ergebenden Produktformeln ermöglichen, wie hier für den Fall der Primzahldiskriminanten ausgeführt wird, die Berechnung der Klassenzahl eines reellen quadratischen Körpers in wesentlich ebenso einfacher Weise wie bei den imaginär-quadratischen Körpern.

*Reichardt* (Leipzig).

**Lednew, N. A.:** Über die Einheiten relativ-zyklischer algebraischer Zahlkörper. *Rec. math. Moscou*, N. s. **6**, 227—260 u. deutsch. Zusammenfassung 260—261 (1939) [Russisch].

Hilberts Satz 91 [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **4**, 273 (1894—1895)] lautet: Ist  $K/k$  zyklisch und  $[K:k]$  eine ungerade Primzahl, so existiert in  $K$  stets ein System von  $r+1$  Grundeinheiten ( $r+1 = r_1 + r_2$ ,  $r_1$  Anzahl der reellen,  $2r_2$  Anzahl der komplexen Körper unter den konjugierten Körpern  $k$ ). — Verf. verallgemeinert diesen Satz, indem er 1. eine zyklische Erweiterung  $K/k$  beliebiger Ordnung betrachtet, 2. die Einheitengruppe  $\varepsilon^{1-S}$  ersetzt durch die Einheitengruppe  $\varepsilon^{a_1 S + \dots + a_m S^m}$  ( $\varepsilon$  Einheiten von  $K$ ,  $S$  erzeugende Substitution der Galoisgruppe von  $K/k$  vom Grade  $n$ ,  $a_i$  ganze rationale Zahlen, für welche das Polynom  $a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$  prim ist zum Polynom  $1 + x + \dots + x^{n-1}$ ). Hilberts Satz 127 (ebenda, 336) lautet: Sei  $l$  eine ungerade Primzahl,  $\zeta = e^{2\pi i/l}$  und  $k(\zeta + \zeta^{-1})$  der durch  $\zeta + \zeta^{-1}$  bestimmte reelle Unterkörper des Kreiskörpers  $k(\zeta)$ , so ist ein beliebiges System von Grundeinheiten von  $k(\zeta + \zeta^{-1})$  stets auch für den Körper  $k(\zeta)$  ein System von Grundeinheiten ( $k$  Körper der rationalen Zahlen). — Verf. verallgemeinert diesen Satz, indem er  $k$  durch eine beliebige endlich-algebraische Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen und  $k(\zeta)$  durch den Kreiskörper der  $l^h$ -ten Einheitswurzeln ersetzt. — Nach dem deutschen Auszug referiert; das dort mehrfach auftretende Wort „Potenz“ muß durch „Ordnung“ ersetzt werden.

*H. L. Schmid* (Berlin).

**Gut, Max:** Mittel aus Dirichlet-Reihen mit reellen Restcharakteren. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich* **85**, Beibl. Nr 32, 214—224 (1940).

Verf. hat (dies. Zbl. **16**, 6) einen Typus unendlicher algebraischer Körper definiert und nachgewiesen, daß der Vereinigungskörper aller zyklischen Körper von festem Primzahlgrad  $q$ , sowie der Körper, der aus allen quadratischen Irrationalitäten besteht, zu diesem Typus gehören. Ist dieser Körper  $k = \lim_{i=\infty} k_i$ ,  $k_0$  der rationale Zahlkörper und  $n_i$  der absolute Grad,  $\zeta_i(s)$  die Dedekindsche Zetafunktion von  $k_i$ , dann existiert  $\lim_{i=\infty} [\zeta_i(s)]^{1/n_i} = Z(s)$  (dies. Zbl. **16**, 6, Satz 1). Dieses Ergebnis wurde durch die Theorie der algebraischen Körper von unendlich hohem Grade gewonnen. Im Falle des Ver-



einigungskörpers aller absolut-zyklischen Körper vom Primzahlgrad  $q$  ist diese Grenzfunktion der Limes des geometrischen Mittels aller  $L$ -Reihen des rationalen Zahlkörpers, deren Charakter die Eigenschaft hat, daß seine  $q$ -te Potenz für jede natürliche Zahl als Argument entweder gleich 1 oder 0 ist. In vorliegender Arbeit zeigt Verf., daß im Spezialfall  $q = 2$  nicht nur das geometrische, sondern auch das arithmetische und das harmonische Mittel von gleichen geeigneten Folgen aller  $L$ -Reihen direkt, ohne die Theorie der algebraischen Körper von unendlich hohem Grade, bestimmt werden kann. Die Durchführung beruht auf einem Lemma (S. 216—217), mit dessen Hilfe derartige Mittel noch für weitere Typen von gewöhnlichen Dirichlet-Reihen mit reellen Restcharakteren erhalten werden können; einige spezielle Fälle als Beispiele am Schluß.

Kienast (Küsnacht).

**Speiser, Andreas:** Gruppen aus der Klassenkörpertheorie. J. reine angew. Math. 182, 178—179 (1940).

Kurze Darstellung einiger gruppentheoretischer Probleme: 1. Halbreduzierte Gruppen treten auf bei der Untersuchung der Einheiten relativ-galoisscher Körper sowie bei der Frage, welche Teile eines Klassenkörpers sich schon an Teilkörper des Grundkörpers anheften lassen. 2. Das Verhalten verschränkter Gruppendarstellungen bei Adjunktion von Einheitswurzeln. 3. Die Struktur der Hilbertschen Untergruppenreihe im Zusammenhang mit dem Problem der rein arithmetischen Begründung der Klassenkörpertheorie.

Reichardt (Leipzig).

**Châtelet, François:** Groupe exceptionnel d'une classe de cubiques. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 200—202 (1940).

Einige Bemerkungen über die Bestimmung der in einem Zahlkörper gelegenen Lösungen endlicher Ordnung von  $y^2 = x^3 + ax + b$ . Z. B. ergibt sich dabei: Die Gleichungen, die dieselbe Invariante wie  $y^2 = x^3 - x - 1$  haben, besitzen in einem beliebigen quadratischen Zahlkörper keine solche Lösung.

Reichardt (Leipzig).

**Barbilian, D.:** Axiomatische Begründung des Abelschen Theorems im Großen. Disquisit. Math. et Phys., Bucureşti 1, 5—22 (1940).

Wenn in einer additiven abelschen Gruppe die Gleichung  $nX = B$  für  $n > 1$  stets mehr als eine, aber nur endlich viele Lösungen besitzt, so bilden die Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe, die direkte Summe von  $r$  Gruppen vom Typus der rationalen Zahlen modulo 1 ist. Unter Zuhilfenahme von  $r$  Symbolen  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ , kann man alle Lösungen der Gleichung  $nX = 0$  in der Form  $\sum_n \frac{m_i}{n} \Omega_i$  darstellen, wobei mit den  $m_i$  modulo  $n$  gerechnet wird. Die Gruppe der Divisorenklassen der Ordnung Null einer algebraischen Kurve vom Geschlecht  $p$  erfüllt die genannten Voraussetzungen, und zwar ist  $r = 2p$ . Legt man eine engere Äquivalenzdefinition für die Punktgruppen auf der Kurve zugrunde, indem man gewisse Doppelpunkte als „virtuell nicht vorhanden“ betrachtet (d. h. sie in der Definition der adjungierten Kurven nicht berücksichtigt), so erhöht sich die Zahl  $r$  um die doppelte Anzahl dieser Doppelpunkte; die Gruppe wird dann die direkte Summe aus der zuerst betrachteten Gruppe und gewissen akzessorischen Gruppen, die zu jenen mehrfachen Punkten gehören.

van der Waerden (Leipzig).

**Jung, Heinrich W. E.:** Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. I. Divisorenklassen. J. reine angew. Math. 180, 219—244 (1939).

Es sei gestattet, die Sätze, die der Verf. in seiner Begriffssprache formuliert, in die Sprache der algebraischen Geometrie zu übersetzen. Divisoren sind Kurven auf einer irred. singularitätenfreien algebr. Fläche, deren irreduzible Bestandteile (Primdivisoren) mit ganzzahligen (auch negativen) Vielfachheiten versehen sind. Gehören zwei Divisoren einer linearen Schar an, so heißen sie äquivalent.  $(\Omega, \mathfrak{R})$  bezeichnet die Schnittpunktszahl der Divisoren  $\Omega$  und  $\mathfrak{R}$ . Ist  $(\mathfrak{P}, \Omega) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$  für jeden Primdivisor  $\mathfrak{P}$ , so heißen  $\Omega$  und  $\mathfrak{R}$  algebraisch äquivalent und man schreibt  $\Omega \approx \mathfrak{R}$ . Ist  $\Omega \approx 0$ , so heißt  $\Omega$  ein Nulldivisor.  $\Omega$  ist dann und nur dann Nulldivisor, wenn



$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) = 0$  ist und es zwei (möglicherweise zusammenfallende) Primdivisoren  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$  mit  $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) > 0$ ,  $(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}) = 0$  und  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}) = 0$  gibt. Die Gruppe der Nulldivisoren besitzt eine kontinuierliche Untergruppe  $R_0$  mit nur endlich vielen Nebenklassen.  $R_0$  besteht nach Severi aus  $\infty^\gamma$  Divisorenklassen, wo  $\gamma = p_g - p_a$ . Ist  $\mathfrak{Q}$  Nulldivisor, so ist ein Vielfaches  $\lambda \mathfrak{Q} \equiv 0$  im Sinne von Severi, d. h. es ist  $\lambda \mathfrak{Q} = \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2$ , wo  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  derselben irred. algebr. Schar angehören. — Die Divisoren  $c_1, \dots, c_r$  heißen algebraisch verbunden, wenn eine Linearkombination  $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r \approx 0$  ist. Sie sind dann auch algebraisch abhängig im Sinne von Severi. Die Maximalzahl der algebraisch unabhängigen Divisoren ist die Picardsche Zahl  $\rho$ , die in bekannter Weise mit den Integralen 3. Gattung zusammenhängt. Unter gewissen (leider nicht genannten) Voraussetzungen über die „Stellendefinition“ gilt  $\rho \geq 2$ . — Für den Fall, daß die vorgelegte Fläche die Gesamtheit der Punktepaare zweier algebr. Kurven ist, werden alle Nulldivisoren bestimmt. Das Ergebnis kann als Satz über Korrespondenzen so formuliert werden: Ist  $\mathfrak{H}$  eine  $(\lambda, \mu)$ -Korrespondenz zwischen zwei Kurven und ist  $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 2\lambda\mu$ , so hat  $\mathfrak{H}$  die Wertigkeit Null. Schließlich werden solche Flächen betrachtet, auf denen ein basispunktfreies irreduzibles Kurvenbüschel existiert. Diejenigen Nulldivisoren, die aus Kurven dieses Büschels oder deren irreduziblen Bestandteilen bestehen, werden bestimmt. Dann wird bewiesen: Wenn ein Nulldivisor  $\mathfrak{R}$  auf jeder irreduziblen Kurve des Büschels und außerdem auf einer einzigen, nicht zum Büschel gehörigen Kurve Punktgruppen ausschneidet, die alle  $\sim 0$  sind, so ist ein Vielfaches von  $\mathfrak{R}$  und unter gewissen weiteren Voraussetzungen sogar  $\mathfrak{R}$  selbst äquivalent Null.

van der Waerden (Leipzig).

**Jung, Heinrich W. E.:** Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. II. Zusammenhang zwischen linearen Integralen zweiter und dritter Gattung. J. reine angew. Math. 181, 68—82 (1939).

Nachdem einige Sätze von Severi über vollständige nichtlineare Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche neu hergeleitet sind, wird gezeigt, daß man aus einem linearen Integral 3. Gattung durch Differentiation nach den Parametern  $\zeta_1, \dots, \zeta_\gamma$ , von denen es abhängt,  $\gamma = p_g - p_a$  linear unabhängige Integrale 2. Gattung erhalten kann. Aus diesen, den  $\gamma$  linear unabhängigen Integralen 1. Gattung und den Funktionen des Körpers kann man jedes Integral 2. Gattung zusammensetzen. Schließlich wird eine Formel hergeleitet, die dem Satze von der Vertauschung von Parameter und Argument für Integrale 3. Gattung entspricht: sie drückt eine Summe  $w + W$  linear durch die  $2\gamma$  linear unabhängigen Integrale 1. und 2. Gattung aus, wobei  $w$  ein Integral 3. Gattung auf der Fläche und  $W$  ein analoges Integral auf der  $\gamma$ -dimensionalen Parameterrmannigfaltigkeit (der „Picardschen Mannigfaltigkeit“) der Integrale 3. Gattung ist.

von der Waerden (Leipzig).

## **Zahlentheorie:**

**Grün, Otto:** Eine Kongruenz für Bernoullische Zahlen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 50, 111—112 (1940).

Sind die  $B_n$  die Bernoullischen Zahlen

$$(B_1 = 1/2, B_2 = 1/6, B_4 = 1/30, \dots, B_{2i+1} = 0 \text{ für } i > 1),$$

weiter  $n$  eine beliebige natürliche Zahl (S. 111 heißt es allerdings mit überflüssiger Einschränkung positive gerade Zahl),  $l$  eine natürliche Primzahl,  $k$  eine zu  $l$  prime natürliche Zahl, endlich  $[x]$  das größte Ganze von  $x$ , so beweist Verf.: Es gilt

$$(k^n - 1) B_n / n k^{n-1} \equiv \sum_{m=1}^{l-1} m^{n-1} [km/l] \pmod{l}. \quad \text{Verf. gibt u. a. folgende Anwendung:}$$

Bei einer Fermatschen Gleichung des Falles I, also einer Gleichung  $x^l + y^l + z^l = 0$  mit ganzen rationalen zu  $l$  primen  $x, y, z$ , gilt das bekannte Kummersche Kriterium:

Mit  $0 < i < l$ ,  $t = -\frac{y}{x}$ ,  $\varphi_i(t) = \sum_{n=1}^{l-1} n^i t^n$  wird  $\varphi_i(t) B_{l-1-i} \equiv 0 \pmod{l}$ . Verf. zeigt nun



mit Hilfe der oben stehenden Kongruenz, daß diese  $l - 1$  Kongruenzen durch die folgenden ersetzt werden können:  $\sum_{n=1}^{l-1} ([kn/l] t^n/n) \equiv 0 \pmod{l}$ . Hierbei kann  $k$  wie vorher die Werte  $1, 2, \dots, l - 1$  annehmen. Die Arbeit ist außerordentlich knapp gefaßt und leider durch einige Druckfehler entstellt. Bemerkt sei, daß die „leichte Umformung“ (S. 112, Z. 11 v. u.), mit der Verf. vom Kummerschen Kriterium zu seinen Kongruenzen gelangt, am leichtesten wohl ausgeführt werden kann, indem man seine weiteren Rechnungen, daß umgekehrt das Kummersche Kriterium aus der obigen Formel folgt, rückwärts ausführt. Holzer (Wien).

**Fitting, F.: Die Konstruktion magischer Quadrate von gerader Zellenzahl.** Deutsche Math. 5, 125—138 (1940).

Zur Darstellung des Planes, nach welchem hier magische Quadrate (m. Q.) konstruiert werden, dient Fig. 3 (S. 130). Wir besetzen je vier mit gleichen Buchstaben benannte Felder dieser Figur mit 0055 oder 1144 oder 2233. Bei 0055 kann die Einordnung sein: entweder

$\begin{array}{|c|c|} \hline 55 & 00 \\ \hline 00 & 55 \\ \hline \end{array}$  oder  $\begin{array}{|c|c|} \hline 00 & 55 \\ \hline 55 & 00 \\ \hline \end{array}$  oder  $\begin{array}{|c|c|} \hline 50 & 05 \\ \hline 05 & 50 \\ \hline \end{array}$  oder  $\begin{array}{|c|c|} \hline 05 & 50 \\ \hline 50 & 05 \\ \hline \end{array}$  oder  $\begin{array}{|c|c|} \hline 50 & 05 \\ \hline 05 & 50 \\ \hline \end{array}$  oder  $\begin{array}{|c|c|} \hline 05 & 50 \\ \hline 50 & 05 \\ \hline \end{array}$ . Die unter diese Quadrate (Q.) gesetzten

Zeichen deuten symbolisch an: 1. Durch  $r, k, d$ , daß entweder in den Reihen oder den Kolonnen oder den Diagonalen des Rechtecks, dessen Ecken die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Felder von Fig. 3 bilden, gleiche Zahlen stehen sollen. 2. Durch  $+$  oder  $-$ , daß das linke obere Feld des Rechteckes die größere oder die kleinere der beiden Zahlen ist. 3. Der Index 0 wurde hinzugefügt, um die symbolische Darstellung auf die Fälle 1144 und 2233 auszudehnen. Für 1144 und 2233 geschah dies durch Änderung des Index 0 in 1 bzw. 2. — Trennt man nun von Fig. 3 den linken oberen Quadranten ab, in welchem alle Buchstaben den Index 1 haben, und ersetzt  $a_1 \dots i_1$  durch je eines unserer vier Felder umfassenden Symbole, so erhält man ein 9feldriges symbolisches Q., welchem nur dann ein 36feldriges, in allen Reihen, Spalten und Diagonalen gleichsummiges Q. entspricht, wenn jede Reihe  $r$  entweder zweimal mit gleichem Index und verschiedenen Vorzeichen oder gar nicht aufweist und Entsprechendes für  $k$  in den Spalten und  $d$  in den Diagonalen gilt. 4a und 4b sind solche symbolische Q., welche, zu 36feldrigen ausgeführt, die magischen Fig. 2a und 2b (S. 129) von der besonderen Beschaffenheit liefern, daß das eine die 6er, und das andere die 1er der Zahlen  $0, \dots, 35$  eines 36feldrigen m.Q. enthält. Die Bedingungen, welche zwei symbolische Q. erfüllen müssen, um in dieser Weise „zusammenzupassen“, sind in der Mitte von S. 130 unter 1 und 2 angegeben. Aus einem solchen Paar zusammenpassender symbolischer Q. lassen sich auf doppelte Weise noch sehr zahlreiche weitere 36feldrige m.Q. ableiten, einmal durch Abänderung der Symbole in den Q. nach den S. 130 (4. Zeile von unten bis S. 131 oben) angegebenen Regeln 1, 2, 3, 4 und weiterhin dadurch, daß man die Zahlen  $0, \dots, 5$  in dem 6er- und dem 1er-Q. eines der so gefundenen 36feldrigen m.Q. 2stellig macht, indem man setzt  $0 = 00, 1 = 01, 2 = 02, 3 = 10, 4 = 11, 5 = 12$ . Die Zahlen des 36feldrigen m.Q. werden damit 4stellig, worauf man es in 4 gleichfalls magische „Komponenten“ zerlegen kann (S. 126, Zeile 10—14 von oben). Jede Permutation dieser Komponenten liefert ein weiteres 36feldriges m.Q., dessen dekadische Zahlen mittels des Verzeichnisses (C) (S. 127 und 128) gefunden werden können. In Absatz V (S. 132) wurde diese  $r, k, d$ -Methode auf das allgemeine Problem der  $(2m)^2$  feldrigen m.Q. ausgedehnt. Fitting (M.-Gladbach).

**Moessner, Alfred: Einige numerische Identitäten.** Bull. sci. Ecole polytechn. Timişoara 9, 245—255 (1940).

**Richard, Ubaldo: Risoluzione elementare dell'equazione indeterminata  $u^2 + v^2 = p$ , essendo  $p$  un numero primo.** Atti Accad. Sci. Torino 75, 268—273 (1940).

Verf. gibt einen einfachen Beweis des bekannten Existenz- und Eindeutigkeitsatzes der ganzzahligen positiven Lösung der diophantischen Gleichung  $u^2 + v^2 = p$ , in der  $p \equiv 1 \pmod{4}$  prim ist. Dieser geometrisch veranschaulichte Beweis ist begrifflich mit demjenigen identisch, der durch ein auch für die Gleichungen  $u^2 + 2v^2 = p$ ,  $u^2 + 3v^2 = p$ ,  $p$  Primzahl, gültiges Verfahren, von einer beliebigen Lösung der Kongruenz  $u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod{p}$  ausgehend, die Lösung der verlangten Gleichung herstellt (vgl. auch M. Cipolla, Encicli. Mat. element. 1, Parte I, 338 (1930)). M. Cipolla.

**Trost, Ernst: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von Fermat.** Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 138—142 (1940).

Nach Fermat hat die diophantische Gleichung  $(2X^2 - 1)^2 = 2Y^2 - 1$  keine nichtnegativen ganzzahligen Lösungen außer den drei trivialen  $X = 0, Y = 1$ ;



$X = 1, Y = 1; X = 2, Y = 5$ . „Man kann sich fragen, ob noch weitere Formen  $MX^2 - N$  mit positiven ganzen Koeffizienten  $M$  und  $N$  die Eigenschaft haben, daß das Quadrat von genau zwei der durch die Form dargestellten Zahlen wieder durch die Form dargestellt wird. Es soll hier eine einparametrische Schar solcher Formen angegeben werden.“ Im Falle  $M = N(N + 1)$  ist die diophantische Gleichung  $(MX^2 - N)^2 = MY^2 - N$  äquivalent mit der folgenden  $N[(N + 1)X^2 - 1]^2 = (N + 1)Y^2 - 1$  und hat stets die trivialen Lösungen  $X = 0, Y = 1$  und  $X = 2, Y = 4N + 1$ . Verf. zeigt, daß sie für  $N = D^2$ , wo  $D$  eine von 1 verschiedene natürliche Zahl bedeutet, außer den trivialen Lösungen keine weiteren in nichtnegativen ganzen Zahlen hat. Beim Beweise wird ein von Ljunggren (s. dies. Zbl. 16, 8) mit Hilfe der Einheitentheorie hergeleiteter allgemeiner Satz über die Lösungen der Gleichungen  $Ax^4 - By^4 = \pm 1$  herangezogen. *Bessel-Hagen* (Bonn).

**Florescu, I. B.:** Wann ist das Produkt von vier ganzen, in arithmetischer Folge liegenden Zahlen ein Quadrat? *Gaz. mat.* 45, 406—409 u. 463—465 (1940) [Rumänisch].

**Pillai, S. S.:** On  $m$  consecutive integers. 2. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 11, 73—80 (1940).

Verf. behandelt, in Fortführung von Untersuchungen in seiner Dissertation (Madras) (Teil I. vgl. dies. Zbl. 23, 108), die bekannte Fragestellung, ob ein Produkt von  $m$  aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen eine  $r$ -te Potenz sein kann, beweist noch einmal die Unmöglichkeit in gewissen, von ihm in der Dissertation angegebenen Spezialfällen und zeigt, daß es eine Konstante  $c = c(m)$  gibt, so daß für  $r > c$  der betrachtete Fall nicht eintreten kann. Man vergleiche hierzu den entsprechenden Satz von Erdős (*J. London Math. Soc.* 14, 245—249 (1939)). *Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

**Johnson, L. Louise:** On the diophantine equation  $x(x + 1) \dots (x + n - 1) = y^k$ . *Amer. Math. Monthly* 47, 280—289 (1940).

Beweis einiger Fälle  $n, k$ , in denen die angegebene Gleichung höchstens eine Lösung hat. *Rohrbach*.

**Tchacaloff, Lhristo, et Chr. Karanicloff:** Résolution de l'équation  $Ax^m + By^n = z^p$  en nombres rationnels. *C. R. Acad. Sci., Paris* 210, 281—283 (1940).

Les auteurs envisagent l'équation indéterminée  $Ax^m + By^n = z^p$  (1), dont les exposants  $m, n, p$  sont des nombres entiers et dont les coefficients  $A$  et  $B$  sont des nombres rationnels donnés. Ils démontrent que, si les exposants  $m, n, p$  sont premiers entre eux deux à deux, on peut trouver neuf nombres entiers  $\lambda, \mu, \nu; \lambda_1, \mu_1, \nu_1; \lambda_2, \mu_2, \nu_2$  vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} m\nu - n\nu_1 &= 0, & n\lambda_1 - p\lambda_2 &= 0, & p\mu_2 - m\mu &= 0, \\ m\lambda - p\lambda_2 &= 1, & n\mu_1 - m\mu &= 1, & p\nu_2 - n\nu_1 &= 1 \end{aligned}$$

et tels que

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 1,$$

et qu'ensuite toutes les solutions en nombres rationnels de l'équation (1) se déduisent des solutions en nombres rationnels de l'équation  $AX + BY = Z$  grâce aux formules

$$x = X^\lambda Y^\mu Z^\nu, \quad y = X^{\lambda_1} Y^{\mu_1} Z^{\nu_1}, \quad z = X^{\lambda_2} Y^{\mu_2} Z^{\nu_2}.$$

*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Pillai, S. S.:** On  $v(k)$ . *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 9, 175—176 (1939).

$v(k)$  denotes the least value of  $s$  for which every  $n$  is representable in the form  $n = \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \dots \pm x_s^k$ ; the methods used are analogue to those of Hardy-Wright, „An introduction to the theory of numbers“, ch. XXI (this Zbl. 20, 292).

*J. F. Koksma* (Amsterdam).

**Pipping, Nils:** Goldbachsche Spaltungen der geraden Zahlen  $x$  für  $x = 60\,000 - 99\,998$ . *Acta Acad. Åboens.* 12, Nr 11, 1—18 (1940).

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 18, 345) gibt Verf. eine 14 Seiten



lange Tabelle aller geraden Zahlen  $x$  des genannten Intervalles, für die nicht schon die Differenz zur nächstkleineren Primzahl (außer etwa  $x - 1$ ) eine Primzahl ist. Der Prozentsatz dieser „ $b$ -Zahlen“ zeigt mit 23,4% im neuen Gebiet gegen 20,8% im alten unter 60000 zwar einen leichten Anstieg, bleibt aber immer noch erstaunlich mäßig. Die Tabelle verzeichnet jeweils die kleinste Primzahl, welche eine Goldbachsche Spaltung für  $x$  leistet. Unter diesen braucht man als größte 293, und zwar bei  $x = 63274$ , dann 283 bei  $x = 84116$ . — Da ferner, wie Ref. noch bemerken möchte, 99989 eine Primzahl ist ( $100000 = 11 + 99989$ ), so ist nunmehr die Goldbachsche Vermutung im ersten Hunderttausend erwiesen. *Alexander Aigner (Graz).*

**Pillai, S. S.:** On numbers which are not multiples of any other in the set. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **10**, 392—394 (1939).

Ist  $F(x) = \sum_{b_r \leq x} \frac{1}{b_r}$ , wo in der Zahlenfolge  $\{b_e\} = b_1, b_2, \dots, b_r, \dots$  keine Zahl ein

Vielfaches einer anderen Zahl der Folge ist, so gilt nach F. Behrend (dies. Zbl. **12**, 52):  $F(x) = O(\log x / \sqrt{\log \log x})$ . Verf. zeigt: Für unendlich viele Folgen  $\{b_e\}$  ist  $F(x) \geq C \log x / \sqrt{\log \log x}$  mit einer explizit angebbaren Konstanten  $C$ . *Rohrbach.*

**Vinogradow, I.:** Estimations of trigonometrical sums. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr **5/6**, 505—523 u. engl. Zusammenfassung 523—524 (1938) [Russisch].

Beweis von 2 Sätzen über Abschätzungen von trigonometrischen Summen. Teileresultat von Satz 1: Es seien  $n, m, a, q, P, Q$  ganze Zahlen,  $n \geq 13, q > 0, (a, q) = 1, P > 0, 1 \leq q \leq P, m \leq q^{(n+1)^{-\frac{1}{2}}}$ . Es seien ferner  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  und  $\theta$  reelle Zahlen mit  $|\theta| < 1, a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$  und  $F(z) = a_1 z + \dots + a_{n+1} z^{n+1}$ . Dann gilt für die

trigonometrischen Summen  $S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i m F(z)}$  die Abschätzung  $|S| < 16 n P q^{-\varrho}$  mit  $\varrho = 1/(n+1)^3 \log(n+1)$ . — Satz 2: Sei  $n \geq 14, P$  und  $Q$  wie oben und  $F(z)$  eine reelle Funktion, welche im Intervall  $Q < z \leq Q + P$  den Ungleichungen

$$\frac{1}{A} \leq \frac{F^n(z)}{n!} \leq \frac{l}{A}, \quad \left| \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{h}{A P^{2/3}}$$

mit  $P \leq A \leq P^2, l \leq 2^n, h \leq 2^n$  genügt. Dann gilt für die Summe  $S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i F(z)}$  die Ungleichung

$$|S| \leq 8 n P^{1-\varrho} \quad \text{mit} \quad \varrho = 1/(n+1)^3 \log(n+1).$$

(Nach dem Auszug referiert.)

*H. L. Schmid (Berlin).*

**Vinogradow, I.:** Simplest trigonometrical sums with primes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 615—617 (1939).

Es werden (ohne Beweis) mehrere Abschätzungen für trigonometrische Summen gegeben. Die ersten drei Sätze behandeln Summen der Gestalt  $\sum \exp\left[2\pi i \frac{a}{q} p^n\right]$  mit ganzen  $a$  und  $q$ , wobei  $(a, q) = 1$  und die Summe über alle Primzahlen  $p$  genommen ist, die  $> N - A$  und  $\leq N$  (mit ganzen  $A$  und  $N$ ) sind. Wird anstatt  $A = O(B)$  die Bezeichnung  $A \ll B$  benutzt, so gelten folgende Abschätzungen: 1)  $S \ll A r^{3\varepsilon-1} q^{\eta-\frac{1}{2}}$ , falls die positiven Konstanten  $\varepsilon$  und  $\eta$  der Ungleichung  $\eta < \varepsilon \leq 1/3$  genügen und  $N e^{-r-2\varepsilon} \ll A \leq N, 0 < q < \exp[r^\varepsilon]$  ist. 2)  $S \ll A q^{\eta-\frac{1}{2}}$ , falls fünf Konstanten,  $\alpha, \sigma, \varepsilon, \eta$  und  $h$  existieren und entweder a) die letzten drei Konstanten positiv und  $< 1$  sind,  $4\alpha + 6\sigma = \frac{1}{1+h}, N^{1-\alpha} \leq A \leq N$  und  $\exp[r^\varepsilon] < q \leq N^\sigma$  ist, oder b) die letzten zwei Konstanten positiv und  $< 1$  sind und  $0 < \varepsilon < \delta, 3\alpha + 5\sigma = \frac{1}{1+h}, N^{1-\alpha} \leq A \leq N$  und  $N^\varepsilon < q \leq N$  ist. — Die übrigen Sätze beziehen sich auf Summen der Form  $S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp[2\pi i \inf(x)]$  mit ganzen und positiven  $P, Q$  und  $m$ , wobei, wie üblich, entweder 1)  $f(x) = a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x$  mit  $a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1,$

$|\theta| < 1$  ist oder  $f(z)$  sich annähernd wie ein Polynom vom Grade  $n+1$  benimmt in dem Sinne, daß II)  $\frac{1}{A} \leq \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \leq \frac{l}{A}$ ,  $\left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{f}{AP^{\frac{1}{2}}}$  [ $P \leq A \leq P^2$ ;  $l \leq 2^n$ ,  $f \leq 2^n$ ] für  $Q < z \leq Q + P$  gilt. In beiden Fällen erhält Verf. sehr gute Abschätzungen. Im Falle I) mit  $n \geq 13$  ergibt sich, wenn noch  $\nu = \frac{1}{n+1}$  gesetzt wird: 3)  $|S| < 15nPq^{-\varrho}$  bzw.  $|S| < 15nm^{\frac{1}{2}\varrho}Pq^{-\varrho}$  mit  $\varrho = \frac{1}{(n+1)^3 \lg(n+1)}$ , wenn  $1 \leq q \leq P$  und  $m < q^{\nu}$  bzw.  $m$  beliebig ist. 4)  $|S| < 5 \cdot 7nP^{1-\varrho}$  bzw.  $|S| < 5 \cdot 7nm^{\frac{1}{2}\varrho}P^{1-\varrho}$  mit  $\varrho = \frac{1}{(n+1)^3 \lg \mu(n+1)}$ , wenn  $P \leq q \leq P^n$ ,  $q = P^\mu$  und  $m \leq P^{\nu}$  bzw.  $m$  beliebig ist. 5)  $|S| < 5 \cdot 7 \frac{n}{\tau} P^{1-\varrho}$  bzw.  $|S| < 5 \cdot 7 \frac{n}{\tau} m^{\frac{1}{2}\varrho} P^{1-\varrho}$ , wenn  $P \leq q < P^{n+1}$ ,  $q = P^{n+1-\tau}$  und  $m \leq P^{\tau\nu}$  bzw.  $m$  beliebig ist. Im Falle II) mit  $n \geq 14$  ergibt sich  $|S| < 5 \cdot 7nP^{1-\varrho}$  mit  $\varrho = \frac{1}{(n+1)^3 \lg 2(n+1)}$ . V. G. Avakumović (Beograd).

**Tschebotarow, N.:** Beweis des Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 27—30 (1940).

**Mordell, L. J.:** Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. 32, 47—50 (1940).

Die erste Arbeit enthält die ausführliche deutsche Darstellung des lange unbekannt gebliebenen Beweises des Verf. für einen wichtigen Teil der Minkowskischen Vermutung über inhomogene Linearformen. Siehe das Mahlersche Referat über Tschebotarew in dies. Zbl. 18, 110, sowie den Vortrag des Ref. im „Verslag 5° Ned. Congres van Leraren in de Wisk. en Nat.“. Groningen 1940, S. 28—39. Die Mordellsche Arbeit enthält historische Bemerkungen und eine geistvolle Abänderung des Tschebotarewschen Beweises, die es ermöglicht, einen älteren Mordellschen Satz (dies. Zbl. 18, 7) heranzuziehen, mit dessen Hilfe Mordell über Tschebotarew hinaus zeigt:

Sind

$$L_\nu(x) + c_\nu = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} x_\mu + c_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

$n$  inhomogene Linearformen mit reellen  $a_{\mu\nu}$ ,  $c_\nu$  und  $\text{Det. } |a_{\mu\nu}| = 1$ , so gibt es stets einen Gitterpunkt  $(x_1, \dots, x_n)$  mit

$$\prod_{\nu=1}^n |L_\nu(x) + c_\nu| \leq \frac{2^{-\frac{1}{2}n}}{1 + (\sqrt{2} - 1)^n} + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig vorgegeben}).$$

J. F. Koksma (Amsterdam).

**Hofreiter, Nikolaus:** Über das Produkt von Linearformen. Mh. Math. Phys. 49, 295—298 (1940).

Verf. zeigt: Es sei  $d$  die absolut kleinste Diskriminante für alle algebraischen Körper  $n$ -ten Grades, von denen  $r$  Konjugierte reell und  $s$  Paare konjugiert komplex sind. Dann gibt es  $n$  Linearformen  $L_i$  in  $x_1, \dots, x_n$  mit Determinante 1, von denen  $r$  reell und  $2s$  paarweise konjugiert komplex sind, so daß die Ungleichung

$$|L_1 \dots L_n| < \frac{1}{\sqrt{d}}$$

in ganzen rationalen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  nur die triviale Lösung hat. Anwendungen in Spezialfällen liefern u. a. Ergebnisse von Davenport (dies. Zbl. 19, 196; 20, 293).

J. F. Koksma (Amsterdam).

**Hofreiter, Nikolaus:** Diophantische Approximationen komplexer Zahlen. Mh. Math. Phys. 49, 299—302 (1940).

Es seien  $n$  und  $m$  natürliche Zahlen,  $m$  quadratfrei, und es bedeute

$$L \equiv \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_{n-1} q_{n-1} - q_n$$

eine Linearform mit beliebigen komplexen Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ , jedoch nicht aus dem Körper  $k(i\sqrt{m})$ .



Setzt man  $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ :

$$\lambda = 1, \quad q_\nu = y_\nu + i\sqrt{m}z_\nu, \quad (m \equiv 3 \pmod{4})$$

$$\lambda = 2, \quad q_\nu = y_\nu + \frac{1 + i\sqrt{m}}{2} z_\nu, \quad (m \equiv 3 \pmod{4})$$

so ist für  $t > 0$  der Ausdruck

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) = \frac{|q_1|^2}{t} + \dots + \frac{|q_{n-1}|^2}{t} + |L|^2 t^{n-1}$$

eine positiv-definite  $2n$ -äre quadratische Form mit der Determinante  $D = \left(\frac{m}{\lambda^2}\right)^n$ .

Indem Verf. die bekannten Abschätzungen quadratischer Formen benutzt [Literatur bei Ref., Diophantische Approximationen, Erg. d. Math. IV, 4, 22–24 (1936); dies. Zbl. 12, 396] und alsdann den Satz des arithmetisch-geometrischen Mittels anwendet, zeigt er: Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  linear unabhängig in bezug auf  $k(i\sqrt{m})$ , so gibt es unendlich viele Systeme ganzer Zahlen  $q_1, \dots, q_n$  aus  $k(i\sqrt{m})$ , so daß

$$\text{ist. Dabei ist } |\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_{n-1} q_{n-1} - q_n| < \frac{K_n}{|q_1 q_2 \dots q_{n-1}|}$$

$$K_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{m}}{2}, \quad K_3 = \left(\frac{8m\sqrt{m}}{27\lambda^3\sqrt{3}}\right)^{1/2}, \quad K_4 = \frac{m}{4\lambda^2},$$

$$K_n^2 < (n+1)! \left(\frac{2\sqrt{m}}{n\pi\lambda}\right)^n. \quad J. F. Koksma (Amsterdam).$$

**Vijayaraghavan, T.:** On the irrationality of a certain decimal. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 10, 341 (1939).

Sehr einfacher Beweis für die Irrationalität des aus der Primzahlenfolge gebildeten Dezimalbruchs  $\delta = 0,23571113 \dots$ . Wäre nämlich  $\delta$  periodisch, so gäbe es eine von  $s$  unabhängige Konstante  $K$ , so daß für jedes  $s$  die Anzahl der  $s$ -stelligen Primzahlen  $\leq K$  ist; also wäre

$$\sum_p \frac{1}{p} \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K}{10^{s-1}}$$

konvergent.

Rohrbach (Berlin-Nikolassee).

**Popken, J.:** On Lambert's proof for the irrationality of  $\pi$ . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 712–714 (1940).

Der Lambertsche Beweis für die Irrationalität von  $\pi$  kann vom Kettenbruch befreit und auf eine ganz elementare Form gebracht werden. Grundlage ist der durch Induktion leicht zu beweisende Satz, daß es zu jedem  $h = 0, 1, 2, \dots$  ganzzahlige Polynome  $p_h, q_h$  höchstens  $2h$ -ten Grades gibt derart, daß für  $x \neq 0$  identisch

$$p_h(x^{-1}) \sin x + q_h(x^{-1}) \cos x = (-2)^h \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+h)!}{n!(2n+2h+1)!} x^{2n+1}$$

wird. Aus der Annahme  $x = \frac{\pi}{4} = \frac{a}{b}$ , ( $a, b$  ganz) folgt dann unter Beachtung des alternierenden Charakters der rechten Seite die Ungleichung

$$0 < \left| a^{2h} p_h\left(\frac{b}{a}\right) + a^{2h} q_h\left(\frac{b}{a}\right) \right| < \sqrt{2} \frac{2^h |a|^{2h}}{h!},$$

und damit der Widerspruch, da die rechte Seite mit  $h \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt, das Mittelglied aber eine positive ganze Zahl ist.

Harald Geppert (Berlin).

**Leighton, Walter:** Proper continued fractions. Amer. Math. Monthly 47, 274–280 (1940).

Es sei  $a_1, a_2, \dots$  eine Folge natürlicher Zahlen. Jeder reellen Zahl  $y_0$  ordne man eine „proper continued fraction“ (kurz „p.c.f.“)  $(1) b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots$  folgendermaßen zu:  $b_0 = [y_0]$ ;  $y_{n-1} = b_{n-1} + a_n/y_n$ ;  $b_n = [y_n]$ ; bei rationalem  $y_0$  bricht der Kettenbruch ab. Der Wert von  $(1)$  ist  $y_0$ . Ein Kettenbruch der Gestalt  $(1)$  mit ganzen

$b_i$  ist dann und nur dann p. c. f. einer Zahl  $y_0$ , wenn  $b_n \geq a_n$ ; bricht er ab, so tritt — wenn er sich nicht auf  $b_0$  reduziert — noch die Bedingung hinzu, daß das letzte  $b_k > a_k$  sein soll. Die einfachsten Konvergenzeigenschaften der p. c. f. sind ähnlich denjenigen der regulären Kettenbrüche ( $a_n = 1$ ) und werden auch ähnlich bewiesen; sind die  $a_n$  groß, so ist die Konvergenz schnell. Die Wahl  $r_0 = b_0$ ,  $a_n = r_{n-1}^2 + 1$ ,  $r_n = r_{n-1} + b_n$  führt auf die „continued cotangent expansions“ von Lehmer (dies. Zbl. 19, 9).

Jarník (Prag).

## Gruppentheorie.

Bays, S., et Chuin-Ché Hsia: Les systèmes imprimitifs dans lesquels se répartissent les combinaisons  $i$  à  $i$  de  $m$  éléments par les substitutions du groupe cyclique de degré  $m$ . Comment. math. helv. 12, 307—316 (1940).

Im Anschluß an frühere Arbeiten (dies. Zbl. 3, 100) wird untersucht: In wieviel Teile zerfällt die Anzahl  $C_m^i$  von Kombinationen von  $m$  Elementen zu je  $i$  unter der zyklischen Gruppe von  $m$  Elementen? Einfache Überlegungen aus der Gruppentheorie führen zur gesuchten Anzahl, die sich mittels der Möbiusschen Funktion angeben läßt.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Nielsen, Jakob: Die symmetrische und die alternierende Gruppe. Mat. Tidsskr. B 1940, 7—18 [Dänisch].

Eine Darstellung der symmetrischen Gruppe mit  $n!$  Elementen durch die Erzeugenden  $P, Q$  mit den definierenden Relationen  $P^2 = Q^{-n}(QP)^{n-1} = (PQ^{-1}PQ)^2 = 1$  für  $2 \leq i \leq n/2$  wurde von Artin bei Untersuchungen aus der Theorie der Zöpfe gefunden, von Coxeter (dies. Zbl. 14, 151) durch gruppentheoretische Rechnungen mit Benutzung früherer Resultate erneut bewiesen, und wird hier vom Verf. mit einfachen gruppentheoretischen Rechnungen ohne besondere Voraussetzungen durch Schluß von  $n$  auf  $n+1$  bewiesen. Aus dieser Darstellung leitet Verf. dann Darstellungen der alternierenden Gruppen durch zwei Erzeugende und definierende Relationen ab, die aber für gerade  $n$  nicht die einfachsten sind. Eine einfachere von Coxeter (dies. Zbl. 14, 53) wird angeführt.

Lochs (Kennelbach).

Kondô, Kôiti: Über die Zerlegung der Charaktere der alternierenden Gruppe. Proc. imp. Acad. Jap. 16, 131—135 (1940).

Im Anschluß an H. Weyl (dies. Zbl. 20, 206) werden die Charaktere der alternierenden Gruppen  $\mathfrak{A}_n$  vom Grade  $n$  in die einfachen Bestandteile in  $\mathfrak{A}_{n-1}$  zerlegt, indem man von der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  über  $\mathfrak{S}_{n-1}$  zu  $\mathfrak{A}_{n-1}$  geht.

J. J. Burckhardt (Zürich).

● De Vincis, Renato: I sottogruppi fondamentali del gruppo metaciclico. Catania: Tip. Zuccarello e Izzi 1938. 8 pag.

Tazawa, Masatada: Über die isomorphe Darstellung der endlichen Gruppe. Tôhoku Math. J. 47, 87—93 (1940).

Nachdem Shoda (dies. Zbl. 4, 242) die Bedingungen angegeben hat, damit eine endliche Gruppe  $\mathfrak{G}$  eine isomorphe irreduzible Darstellung besitzt, untersucht der Verf. die Frage, wie viele irreduzible Bestandteile es in einer isomorphen Darstellung von  $\mathfrak{G}$  gibt. Sei  $\mathfrak{B}$  die Vereinigung aller minimalen Normalteiler  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{G}$  und  $\Gamma$  der Operatorenbereich der inneren Isomorphismen, so liefert die Untersuchung der Idealzerlegung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \dots \mathfrak{I}_a$  die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $\mathfrak{G}$  genau  $k$  irreduzible Bestandteile hat. Ist im besonderen  $\mathfrak{G}$  eine  $p$ -Gruppe und  $p^c$  die Ordnung des Produktes aller minimalen Normalteiler, so hat jede isomorphe Darstellung mindestens  $c$  irreduzible Bestandteile, und es gibt eine isomorphe Darstellung mit genau  $c$  irreduziblen Bestandteilen.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Wielandt, Helmut:  $p$ -Sylowgruppen und  $p$ -Faktorgruppen. J. reine angew. Math. 182, 180—193 (1940).

Verf. behandelt die Abbildungen endlicher Gruppen  $\mathfrak{G}$  auf  $p$ -Sylowgruppen  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{G}$ . Die Arbeit bringt die allgemeinsten, bisher in dieser Beziehung erreichten



Resultate. Allen derartigen Untersuchungen liegt bekanntlich folgende Überlegung zugrunde: Ist  $\mathcal{G}_1$  ein Normalteiler von  $\mathcal{G}$ , dessen Faktorgruppe eine  $p$ -Gruppe ist, und ist  $\mathfrak{P}$  eine beliebige  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathcal{G}$ , so ist  $\mathcal{G}_1\mathfrak{P} = \mathcal{G}$ , also  $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1 \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap \mathcal{G}_1$ . So ergibt sich das Problem, diejenigen Normalteiler von  $\mathfrak{P}$  zu charakterisieren, die  $p$ -Sylowgruppen von solchen Normalteilern von  $\mathcal{G}$  sind, deren Faktorgruppe eine  $p$ -Gruppe ist. Es gelingt dem Verf., eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß eine vorgegebene  $p$ -Untergruppe von  $\mathcal{G}$  eine  $p$ -Sylowgruppe eines Normalteilers von  $\mathcal{G}$  von einem Index  $p^\alpha$  sei (Satz 9).

Einige Definitionen des Verf. sind zum Verständnis seines Hauptsatzes notwendig. Def. 1. Eine transitive monomiale  $p$ -Gruppe vom Grade  $p$  heiße eine Ausnahmegruppe, wenn in ihr eine Diagonalsubstitution  $D$  auftritt, deren Determinante  $\Delta(D) \neq 1$  ist. Def. 2. Eine  $p$ -Gruppe  $\mathfrak{P}$  habe die Eigenschaft  $R$ , wenn unter den monomialen Darstellungen von  $\mathfrak{P}$  und von Untergruppen von  $\mathfrak{P}$  sich keine Ausnahmegruppe befindet. Def. 3. Sei  $\mathcal{G} \supset \mathcal{H} \supset \mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{A}$  ist in  $\mathcal{H}$  mit Bezug auf  $\mathcal{G}$  schwach abgeschlossen, wenn für alle  $T \in \mathcal{G}$  aus  $T^{-1}\mathfrak{A}T \subset \mathcal{H}$  folgt:  $T^{-1}\mathfrak{A}T = \mathfrak{A}$ ;  $\mathfrak{A}$  ist in  $\mathcal{H}$  mit Bezug auf  $\mathcal{G}$  stark abgeschlossen, wenn für alle  $T \in \mathcal{G}$  gilt:  $T^{-1}\mathfrak{A}T \cap \mathcal{H} \subset \mathfrak{A}$ . Ist  $\mathfrak{A}$  eine beliebige Untergruppe von  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ , so heiße die Vereinigungsgruppe von  $\mathfrak{A}$  mit allen in  $\mathcal{H}$  liegenden, in  $\mathcal{G}$  zu  $\mathfrak{A}$  konjugierten Gruppen die schwache Abschließung von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathcal{H}$  bezüglich  $\mathcal{G}$ . Entsprechend heiße die Vereinigungsgruppe aller  $T^{-1}\mathfrak{A}T \cap \mathcal{H}$ ,  $T \in \mathcal{G}$ , mit  $\mathfrak{A}$  die starke Abschließung von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathcal{H}$ . Der Hauptsatz der Arbeit lautet:  $\mathfrak{P}$  sei eine  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathcal{G}$ ,  $\mathfrak{P}_1$  sei schwach abgeschlossen in  $\mathfrak{P}$ .  $\mathfrak{N}$  sei der Normalisator von  $\mathfrak{P}_1$  in  $\mathcal{G}$ ,  $\overline{\mathfrak{N}}$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{N}$  mit Abelscher  $p$ -Faktorgruppe  $\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{N}}$ .  $\mathcal{G}$  besitzt einen Normalteiler  $\mathcal{U}$  mit  $\mathcal{U} \cap \mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{N}}$  und  $\mathcal{G}\mathfrak{N} = \mathcal{G}$  (also insbesondere  $\mathcal{G}/\mathcal{U} \cong \mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{N}}$ ), falls es in  $\mathfrak{P}$  zwei Untergruppen  $\mathfrak{P}_0$  und  $\mathfrak{P}_2$  mit den folgenden Eigenschaften gibt: a)  $\mathfrak{P}_0$  ist stark abgeschlossen in  $\mathfrak{P}$ , b)  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  sind Normalteiler von  $\mathfrak{P}_0$ , c) für je zwei Elemente  $P_0 \in \mathfrak{P}_0$  und  $P_1 \in \mathfrak{P}_1$  besitzt die Faktorgruppe  $\{P_0, P_1, P_2\}/\mathfrak{P}_2$  die Eigenschaft  $R$ , d) die starke Abschließung von  $\mathfrak{P}_2$  in  $\mathfrak{P}$  liegt in  $\overline{\mathfrak{N}}$ . Hierbei gilt:

$$E \leq \mathfrak{P}_1 \leq \mathfrak{P}_0 \leq \mathfrak{P},$$

$$E \leq \mathfrak{P}_2 \leq \mathfrak{P}_0 \leq \mathfrak{P}.$$

Der Beweis erfolgt durch monomiale Darstellung von  $\mathcal{G}$ , Nachweisung von Normalteilern von  $\mathcal{G}$  mit zykl.  $p$ -Faktorgruppe und Durchschnittsbildung aus diesen Normalteilern. Durch vollständige Induktion nach der Ordnung von  $\mathcal{G}$  erweitert Verf. den Hauptsatz auf nichtabelsche  $p$ -Faktorgruppen, die auf diese Art zum erstenmal einer allgemeinen Behandlung zugänglich werden. Dies geschieht mit: Satz 8. Der Hauptsatz bleibt richtig, wenn in ihm die Voraussetzung „ $\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{N}}$  abelsch“ durch die schwächere „ $\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{N}}$  abelsch“ ersetzt wird, und Satz 10. Der Hauptsatz bleibt richtig, wenn in ihm die Voraussetzung „ $\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{N}}$  abelsch“ gestrichen und dafür die Voraussetzung „ $\mathfrak{P}_1$  stark abgeschlossen in  $\mathfrak{P}$ “ hinzugefügt wird. Verf. macht einige Anwendungen dieser Sätze unter Spezialisierung von  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ , die interessante Einblicke gewähren. Z. B. zeigt sich, daß die maximale  $p$ -Faktorgruppe von  $\mathcal{G}$  isomorph zu der des Normalisators einer  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  von  $\mathcal{G}$  sein muß, wenn die Ordnung von  $\mathfrak{P}$  nicht größer als  $p^2$  ist (Satz 6). Daß diese obere Schranke nicht mehr überschritten werden kann, zeigt Verf. im Abschnitt V durch ein Gegenbeispiel. — Der wichtige Fortschritt, den die Arbeit bringt, besteht darin, daß, wie erwähnt, auch nichtabelsche  $p$ -Faktorgruppen der Behandlung zugänglich werden und die Struktur von  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{N}$  mit der Struktur der maximalen  $p$ -Faktorgruppe von  $\mathcal{G}$  in Beziehung gesetzt wird.

Grün (Berlin).

Hall, P.: The classification of prime-power groups. J. reine angew. Math. 182, 130—141 (1940).

Das Problem, alle Gruppen einer gegebenen Ordnung zu charakterisieren, wird mit neuen Methoden bearbeitet, die sich insbesondere für Gruppen der Ordnung  $p^n$  ( $p$ -Gruppen) als angemessen erweisen. Einleitend werden die bekannten Klassifikationen besprochen, so die von O. Hölder für Gruppen der Ordnung  $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$  und die von Bagnara für Gruppen der Ordnung  $p^5$ . Dabei scheint es unwahrscheinlich, beliebige  $p$ -Gruppen durch ein endliches Formelsystem zu erfassen. Um sie durch Strukturcharaktere einteilen zu können, wird zuerst der Begriff der Klasse einer Gruppe  $G$  eingeführt. Ausgehend von der Tatsache, daß das Zentrum  $Z_1$  jeder  $p$ -Gruppe mehr als ein Element enthält, wird die aufsteigende Zentralreihe dadurch definiert, daß die Faktorgruppe  $Z_i/Z_{i-1}$  das Zentrum von  $G/Z_{i-1}$  ist, wobei  $Z_c = G$ .  $c$  heißt die Klasse von  $G$ . Diese kann in dualer Weise aus der Kommutatorgruppe  $H_2$  von  $G = H_1$  erhalten werden. Da für  $p$ -Gruppen stets  $H_2 \subset G$  ist, setzt man  $[H_i, G] = H_{i+1}$ , wobei  $[H_i, G]$  diejenige Gruppe ist, die von allen Kommutatoren  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$  erzeugt wird, wo  $x$  ein Element aus  $H_i$  und  $y$  ein Element aus  $G$  ist;  $H_{c+1} = 1$ ,  $c$  ist die Klasse,

die Reihe  $H_i$  heißt absteigende Zentralreihe. Für die Gruppen der Ordnung  $p^4$  liefert bereits der Klassenbegriff eine adäquate Einteilung. Doch für höhere Potenzen von  $p$  ist er ungenügend, und es wird erörtert, wie alle bloß numerischen Invarianten nicht näher zum Ziele führen. — Daher führt Verf. den Begriff des Strukturcharakters einer Gruppe ein und untersucht im weiteren Verlauf der Arbeit seine Anwendung, insbesondere auf  $p$ -Gruppen. Der Ausgangspunkt ist die Bemerkung, daß die Kommutatorgruppe  $H_2$  von  $G$  eine Funktion ist, deren Argumente nicht die Gruppe  $G$  durchlaufen, sondern bloß die Faktorgruppe  $G/Z_1$ . Daher werden zwei Gruppen  $G$  und  $G'$  gleich schief (isoclinic) genannt,  $G \sim G'$ , und zur selben Familie gezählt, wenn 1.  $G/Z_1$  isomorph  $G'/Z_1$ , 2.  $H_2$  isomorph  $H'_2$ , und 3. die Isomorphismen 1. und 2. die Zuordnung entsprechender Elemente erhalten, d. h. wenn nach 1. den Elementen  $Z_1a$  und  $Z_1b$  aus  $G/Z_1$  zugeordnet sind  $Z_1a'$  und  $Z_1b'$  aus  $G'/Z_1$ , dann soll dem Element  $[a, b]$  von  $H_2$  das Element  $[a', b']$  aus  $H'_2$  zugeordnet sein. Eine Abelsche Gruppe  $A$  ist  $\sim 1$ . Da die höheren Kommutatorgruppen Invarianten einer Familie sind, ist auch die Klasse eine solche. Man zeigt leicht, daß die Einteilung derjenigen Untergruppen, die das Zentrum enthalten, in Familien nur von der Familie der Gruppe abhängt, und daß die Familie, zu der eine beliebige Untergruppe  $K$  gehört, dieselbe ist wie die Familie, zu der  $KZ_1$  gehört:  $K \sim KZ_1$ . Ferner ist  $G \sim K$  dann und nur dann, wenn  $KZ_1 = G$ . Für die Familie einer Faktorgruppe gilt:  $G/K \sim G/(K \wedge H_2)$ , daher  $G \sim G/K$  nur, wenn  $K \wedge H_2 = 1$ . In jeder Familie gibt es Gruppen mit  $Z_1 \subseteq H_2$ , sie heißen Stammgruppen. Nennt man ferner alle Gruppen derselben Familie, welche dieselbe Ordnung haben, einen Zweig (branch), dann ist die Ordnung einer Gruppe gleich der Ordnung einer gleich schiefen Stammgruppe multipliziert mit dem Verzweigungsfaktor  $(Z_1: Z_1 \wedge H_2) = (Z_1 H_2: H_2)$ . Der Zusammenhang mit der Darstellungstheorie wird hergestellt durch den Satz, daß in gleich schiefen Gruppen derselben Ordnung die Anzahl von Klassen konjugierter Elemente, die je  $k$  Glieder enthalten, dieselbe ist. — Mit den angeführten Begriffen werden klassifiziert: a) die Gruppen der Ordnung  $p^5$ ,  $p > 3$ . Man erhält zehn Familien, die nach steigendem Rang hergeleitet werden. Dabei heißt  $\rho$  der Rang, wenn unter den Stammgruppen der Familie sich solche der Ordnung  $p^2$  befinden.  $\rho = 1$  und  $\rho = 2$  gibt Abelsche Gruppen,  $\rho = 3$  und  $\rho = 4$  je eine Familie. Um die zu  $\rho = 5$  gehörenden Familien herleiten zu können, werden die Beziehungen untersucht, die zwischen den Familien derjenigen Gruppen bestehen, die eine gegebene Gruppe  $K$  von inneren Automorphismen besitzen; b) diejenigen  $p$ -Gruppen, die eine Abelsche Untergruppe vom Index  $p$  haben. Ihre Einteilung in Familien ist sehr einfach, indem eine eindeutige Beziehung zwischen Familien und den Partitionen von  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$  besteht, wobei  $p^n$  die Ordnung der Kommutatorgruppe  $H_2$  ist und  $p^{\lambda_i}$  diejenige von  $H_i/H_{i+1}$ ; der Rang jeder Familie beträgt  $n + \lambda_1 + 1$ .

*J. J. Burckhardt* (Zürich).

**Scholz, Arnold: Abelsche Durchkreuzung.** *Mh. Math. Phys.* 48, 340—352 (1939).

Man rechne zwei normale endliche Erweiterungen  $K = P(\kappa)$  und  $\Lambda = P(\lambda)$  des normalen Körpers  $P$  zum selben Geschlecht, wenn es einen Abelschen Körper  $A$  gibt, so daß  $KA = \Lambda A$  ist; haben außerdem  $K$  und  $A$  denselben Durchschnitt wie  $\Lambda$  und  $A$ , so zählen sie zur selben Klasse (Abelsche Durchkreuzung). Ziel der Arbeit ist die Frage nach dem Verhalten der zugehörigen Galoisschen Gruppen. Verf. gibt bei der Untersuchung dieser Gruppen stets die zugehörigen Körperoperationen an. Es werden folgende Begriffe eingeführt. Die Gruppe  $\mathfrak{L}$  heißt Aufspaltung der Gruppe  $\mathfrak{K}$ , wenn  $\mathfrak{K}$  eine Faktorgruppe von  $\mathfrak{L}$  ist:  $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$  auch  $\mathfrak{L} = \mathfrak{K} \cup \mathfrak{M}$  geschrieben (entsprechend der Bildung eines Galoisschen Oberkörpers),  $\mathfrak{M}$  heißt der Multiplikator von  $\mathfrak{L}$ . Man spricht von Kommutatoraufspaltung, wenn  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}'$ , von zentraler Aufspaltung, wenn  $\mathfrak{M}$  im Zentrum von  $\mathfrak{L}$ . Eine zentrale Kommutatoraufspaltung heißt Knotung. Relatives Produkt  $\mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}_2$  heißt die kleinste gemeinsame Aufspaltung zweier Gruppen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  mit gemeinsamer Faktorgruppe, Abelsche Aufspaltung von  $\mathfrak{K}$  eine Gruppe  $\mathfrak{L} = \mathfrak{K} \circ \mathfrak{A}$ , die aus  $\mathfrak{K}$  durch relative Multiplikation mit einer Abelschen Gruppe  $\mathfrak{A}$



entsteht (Adjunktion eines Abelschen Körpers). Es gilt:  $\mathfrak{L}$  ist Abelsche Aufspaltung von  $\mathfrak{K}$ , wenn die Kommutatorgruppe  $\mathfrak{L}'$  zum Multiplikator  $\mathfrak{M}$  fremd ist:  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}' = 1$ . Man zählt zwei Gruppen zum selben Geschlecht, wenn sie eine gemeinsame Abelsche Aufspaltung besitzen. Die Abelsche Durchkreuzung von  $\mathfrak{K}$  mit der Abelschen Gruppe  $\mathfrak{A}$  erhält man, wenn man  $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{H}$  wieder als  $\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \circ \mathfrak{A}$  darstellt mit  $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{K}\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{K}$  heißen verwandt und zählen zur selben Klasse. Zwei Gruppen,  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$ , die zum selben Geschlecht gehören, sind zentrale Aufspaltungen ihrer Durchschnittsfaktorgruppe  $\mathfrak{G}$ , und es gilt  $\mathfrak{G}'_1 \cong (\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2)' \cong \mathfrak{G}'_2$ . Sind sie Knotungen, so gehören sie zur selben Klasse Abelscher Durchkreuzungen. — Der Zusammenhang mit der Darstellungstheorie wird hergestellt durch den Satz, daß die Darstellungsgruppen einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  eine volle Klasse verwandter Aufspaltungen von  $\mathfrak{G}$  bilden; sie besitzen zu jeder Knotung von  $\mathfrak{G}$  genau je eine verwandte Faktorgruppe. Ferner ist die Ableitung jeder zentralen Aufspaltung von  $\mathfrak{G}$  homomorph zur Ableitung einer Darstellungsgruppe von  $\mathfrak{G}$ . — Die Untersuchung wird ausgedehnt auf Gruppen, die durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben sind, und es wird die allgemeine Durchkreuzung untersucht. J. J. Burckhardt (Zürich).

**Scholz, Arnold:** Zur Abelschen Durchkreuzung. J. reine angew. Math. 182, 216 (1940).

Es wird der Zusammenhang hergestellt zwischen der vorstehend besprochenen Arbeit und der oben besprochenen Arbeit von P. Hall, indem gezeigt wird, daß die Begriffe Gruppengeschlecht und Klasse verwandter Gruppen mit den Hall'schen Begriffen Familie und Zweig übereinstimmen, wenn der Multiplikator  $\mathfrak{M}$  der Aufspaltung  $\mathfrak{L} = \mathfrak{K} \cup \mathfrak{M}$  das Zentrum von  $\mathfrak{L}$  ist. Ferner wird gezeigt, daß jedes Geschlecht zentraler Aufspaltungen genau eine Klasse von Knotungen enthält, diese entsprechen den Minimalzweigen. J. J. Burckhardt (Zürich).

**Waerden, B. L. van der:** Bericht über die Arbeit von H. Fitting, Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. J. reine angew. Math. 182, 215 (1940).

Inhaltsangabe der in dies. Zbl. 19, 198 besprochenen Arbeit. H. Geppert.

**Zappa, Guido:** Remark on a recent paper of O. Ore. Duke math. J. 6, 511—512 (1940).

Durch Induktion nach der Gruppenordnung wird bewiesen: Wenn jede Untergruppe einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  (einschließlich  $\mathfrak{G}$ ) Untergruppen jeder möglichen Ordnung enthält, so enthält auch jede Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}$  Untergruppen jeder möglichen Ordnung. Damit wird die von O. Ore gestellte Frage (dies. Zbl. 21, 211), ob eine Gruppe mit konformen Ketten sich kennzeichnen läßt als endliche Gruppe, die samt ihren Untergruppen Untergruppen jeder möglichen Ordnung enthält, in bejahendem Sinne beantwortet. Zassenhaus (Hamburg).

**Fuchs-Rabinowitsch, D. J.:** Über eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen, die keine isomorphe Darstellung durch Matrizen von endlicher Ordnung zuläßt. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 425—426 (1940).

Sei die Gruppe  $G$  durch die Erzeugenden  $a, b, x, y$  mit den definierenden Relationen  $y^2 = 1, yx = xy, ax = xya, bx = x^2b$  bestimmt. Es wird gezeigt, daß es keine Matrizen mit Elementen aus einem kommutativen, algebraisch abgeschlossenen Körper gibt, die eine zu  $G$  isomorphe Gruppe erzeugen. Der Beweis wird geführt, indem man zeigt, daß die Abbildungen der komplexen Ebene  $y(z) = -z, x(z) = 2z, a(z) = z \cdot e^{\frac{\log|z|}{\log 2} \pi i}, b(z) = |z|^2 e^{i \arg z}$  eine zu  $G$  isomorphe Gruppe erzeugen, die sich nicht durch Matrizen darstellen läßt. J. J. Burckhardt (Zürich).

**Keréjártó, B. de:** Sur les inversions dans un group commutatif. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 288—289 (1940).

In der kommutativen Gruppe  $G$  verstehe man unter Inversion bezüglich des Elementes  $T$  aus  $G$  die Transformation, die jedem  $X$  aus  $G$  das involutorische Element  $X^{-1}T^2$  zuordnet.  $T$  ist dabei invariantes Element. Es gilt der Satz: Enthält die

kommutative Gruppe  $G$  kein Element zweiter Ordnung, so ist die Inversion bezüglich der Identität  $I$  charakterisiert durch: a)  $I$  ist das einzige invariante Element, b) das Produkt der Inversion und ihrer Transformaten mit einem beliebigen Element aus  $G$  ist ein Element aus  $G$ . Hieraus folgt u. a.: Ist  $G$  die lineare komplexe Gruppe  $z' = cz$ , so charakterisiert obiger Satz die Inversionen  $z' = a^2/z$ . Ferner kann ein Satz des Verf. über bestimmte topologische Transformationen der Kugel bewiesen werden.

*J. J. Burckhardt (Zürich).*

**Fouxe-Rabinovitch, D. I.:** Über die Nichteinfachheit einer lokal freien Gruppe. *Rec. math. Moscou*, N. s. 7, 327—328 u. deutsch. Zusammenfassung 328 (1940) [Russisch].

In einer freien Gruppe gibt es nach Magnus (dies. Zbl. 11, 152) zu jedem von 1 verschiedenen Element  $A$  einen Index  $n$ , so daß die  $n$ -te Dimensionsgruppe  $A$  enthält, dagegen die  $(n + 1)$ -te keine positive Potenz von  $A$ , daher sind Relationen der Gestalt

$A = \prod_{i=1}^r S_i(A^2)^{x_i} S_i^{-1}$  unmöglich. Folgerung: in einer lokal freien Gruppe erzeugt jedes von 1 verschiedene Quadrat einen echten Normalteiler. *Zassenhaus (Hamburg).*

**Nielsen, Jakob:** Über Gruppen linearer Transformationen. *Mitt. math. Ges. Hamburg* 8, Tl. 2, 82—104 (1940).

Es handelt sich um nichtabelsche Gruppen  $F$  linear gebrochener Substitutionen  $f$  einer Variablen, die alle hyperbolisch sind, also das Innere  $D$  des Einheitskreises  $E$  in sich überführen und zwei verschiedene Fixpunkte auf  $E$  haben. Mit geometrischen, einfachen Überlegungen beweist Verf. grundlegende Sätze darüber: Zwei  $f$  aus  $F$  haben entweder beide Fixpunkte oder keinen gemein. Die Menge  $G_F$  der Fixpunkte aller  $f$  aus  $F$  hat immer unendlich viele Punkte, häuft sich in jedem ihrer Punkte, ist entweder nirgends dicht oder häuft sich in jedem Punkt von  $E$ . Sind  $j$  und  $j'$  zwei getrennte Intervalle auf  $E$ , deren jedes Punkte von  $G_F$  enthält, so gibt es auch ein  $f$ , von dem ein Fixpunkt in  $j$ , der andere in  $j'$  liegt.  $F$  ist in  $D$  diskontinuierlich, woraus folgt, daß es nur abzählbar viele Elemente hat. Alle  $f$  mit denselben Fixpunkten sind Potenzen eines einzigen von ihnen. Die abgeschlossene Hülle  $\bar{G}_F$  von  $G_F$  ist zugleich Häufungsmenge der zu irgendeinem Punkt von  $D$  äquivalenten Punkte. Ist  $\bar{G}_F$  von  $E$  verschieden, so besteht  $E - \bar{G}_F$  aus offenen Intervallen, deren Endpunkte entweder beide Fixpunkte derselben Substitution sind oder beide nicht zu  $G_F$  gehören. Der Durchschnitt  $H$  von  $D$  mit der im nichteuklidischen Sinne konvexen Hülle der Menge  $\bar{G}_F$  erlaubt, die Erzeugbarkeit von  $F$  aus endlichvielen Elementen zu charakterisieren. Diese Erzeugbarkeit besteht dann und nur dann, wenn es ein  $r < 1$  gibt, so daß zu jedem Punkt aus  $H$  ein äquivalenter existiert, dessen Betrag kleiner als  $r$  ist. — Weitere Sätze werden ohne Beweise angeführt und auf eine vom Verf. beabsichtigte spätere Darstellung verwiesen.

*Lochs (Kennelbach).*

**Cartan, Élie:** Sur les groupes linéaires quaternioniens. *Vjschr. naturforsch. Ges.* 85, Beibl. Nr 32, 191—203 (1940).

Jede Gruppe  $\mathfrak{G}$  nichtsingulärer  $n$ -reihiger Matrizen mit Quaternionen als Koeffizienten geht nach Einsetzung der regulären Darstellung der Quaternionen in eine Gruppe  $\mathfrak{G}^*$   $4n$ -reihiger nichtsingulärer Matrizen mit reellen Koeffizienten über. — Ref. bemerkt, daß die Darstellungsklassen  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{G}^*$  sich wegen der Äquivalenz  $\mathfrak{G}^* \sim 4\mathfrak{G}$  umkehrbar eindeutig entsprechen. — Gesucht wird eine Kennzeichnung der Gruppen  $\mathfrak{G}$  im Reellen, die sich herleiten aus denjenigen irreduziblen Gruppen  $\mathfrak{G}$ , deren sämtliche Darstellungsmoduln über den Quaternionen im Sinne der Geometrie von Wachs projektiv äquivalent sind. — Satz 1: Über dem Körper der komplexen Zahlen zerfällt  $\mathfrak{G}$  in zwei äquivalente Gruppen  $\mathfrak{G}_1$ ,  $\mathfrak{G}_2$   $2n$ -ten Grades, deren jede eine Antiinvolution 2. Art invariant lassen. — Wenn sich  $\mathfrak{G}$  so transformieren läßt, daß die Koeffizienten schon einem echten Unterkörper der Quaternionen angehören (Gruppen 2. Art), so gibt es mehrere projektiv nichtäquivalente Darstellungsmoduln und  $\mathfrak{G}^*$  zerfällt dann in zwei äquivalente reelle Darstellungen. — Die weiterhin zu untersuchenden Gruppen  $\mathfrak{G}$



lassen sich demnach nicht auf komplexe Gestalt transformieren (Gruppen 1. Art). Wenn  $\mathfrak{G}$  irreduzibel von 1. Art ist, so ist nach Lemma I  $\mathfrak{G}_1$  im Komplexen irreduzibel, nach Lemma II ist  $\mathfrak{G}^*$  im Reellen irreduzibel, und nach Satz 4 sind sämtliche Darstellungsmoduln von  $\mathfrak{G}$  projektiv äquivalent. Das Hauptergebnis der Arbeit lautet (Satz 5): Umgekehrt leitet sich jede irreduzible reelle Matrizen­gruppe, die im Komplexen in zwei äquivalente Gruppen zerfällt, aus einer irreduziblen linearen Gruppe 1. Art mit Quaternionen als Koeffizienten her. — Die kontinuierlichen Gruppen der unter­suchten Art werden vollständig bestimmt, indem diese Aufgabe auf eine Aufgabe über reelle lineare Gruppen, die von Cartan [Les groupes projectifs réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. J. Math. pures appl. **10**, 149—186 (1914)] und W. Barrett (Sur la structure des groupes semi-simples réels. Thèse Paris, Deuxième Partie 1939, 53—76) gelöst worden ist, zurückgeführt wird. *Zassenhaus.*

**Cartan, Henri:** Un théorème sur les groupes ordonnés. Bull. Sci. math., II. s. **63**, 201—205 (1939).

Verf. beweist, daß jede archimedisch geordnete Gruppe kommutativ ist. Der Beweis ist elementar insofern nur die Begriffe der geordneten, archimedischen Gruppe verwendet werden, und gelingt mit dem Nachweis, daß das Produkt  $xy$  zweier Elemente eine stetige Funktion von  $x$  und  $y$  ist. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

**Witt, Ernst:** Die Automorphismengruppen der Cayleyzahlen. J. reine angew. Math. **182**, 205 (1940).

Inhaltsangabe der in dies. Zbl. **23**, 15 besprochenen Arbeit von Erna Bannow. *H. Geppert* (Berlin).

**Kodaira, Kunihiko:** Über die Differenzierbarkeit der einparametrischen Untergruppe Liescher Gruppen. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 165—166 (1940).

Es wird ein einfacher Beweis für den bekannten Satz gegeben, daß jede stetige einparametrische Untergruppe einer Lieschen Gruppe differenzierbar in bezug auf den Parameter ist. Differentiation durch Integration! *Zassenhaus* (Hamburg).

**Brandt, H.:** Über die Axiome des Gruppoids. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. Nr 32, 95—104 (1940).

Unter einem Gruppoid versteht der Verf. den Inbegriff einer nicht leeren Menge  $G$  und einer (nicht notwendig für alle geordneten Paare von Elementen in  $G$  definierten) Multiplikation  $M$  in  $G$ , wobei über  $M$  die folgenden Axiome (A.) postuliert werden: 1. das A. der Eindeutigkeit des Produktes und beider Quotienten, 2. Assoziativaxiome, 3. das A. der Einheiten und des inversen Elementes, 4. das Verbindungsaxiom (s. Math. Ann. **96**, 360). In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um Aufstellung von äquivalenten, aber irreduziblen Axiomensystemen, wobei einmal die Existenz von ausgezeichneten Elementen (Rechtseinheit, inverses Element) postuliert, das andere Mal aber durch andere A. ersetzt wird. — Bemerkung des Ref.: In der letzten Zeit ist der Name Gruppoid (Gr.) in verschiedenem Sinne gebraucht worden [s. B. A. Hausmann and Oystein Ore, Amer. J. Math. **59**, 983—1004 (1937); dies. Zbl. **17**, 391; G. Birkhoff, Duke math. J. **3**, 443—454 (1937); dies. Zbl. **17**, 194]. Der Ref. erlaubt sich vorzuschlagen, diesen Namen in dem allgemeinsten Sinne von Hausmann und Ore anzuwenden, also unter einem Gr. den Inbegriff einer nicht leeren Menge  $G$  und einer (für alle geordneten Paare von Elementen in  $G$  definierten) Multiplikation in  $G$  zu verstehen. Dann kann man von Gr. mit Einheiten, assoziativen Gr. usw. sprechen. Die obigen Gr. könnte man als Gr. von H. Brandt bezeichnen.

*O. Borůvka* (Brünn).

**Rybakoff, L.:** Sur une classe de semi-groupes commutatifs. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 521—536 u. franz. Zusammenfassung 536 (1939) [Russisch].

Strukturuntersuchungen von kommutativen Halbgruppen mit Einselement und Kürzungsregel: Aus  $av = aw$  folgt  $v = w$ . Der Hauptteiler, der aus allen Elementen besteht, die kein Inverses besitzen, bildet eine kommutative Halbgruppe ohne Einselement und heißt reine Halbgruppe. Wenn die reine kommutative Halbgruppe eine

Basis besitzt, so ist diese Basis eindeutig bestimmt (absolute Basis). Wenn die ganze Halbgruppe eine Basis besitzt, so besitzt auch die reine Halbgruppe eine Basis. Diese entsteht durch Multiplikation der in der reinen Halbgruppe gelegenen Basiselemente der ganzen Halbgruppe mit beliebigen invertierbaren Elementen der ganzen Halbgruppe. Verf. beweist schließlich: Jede reine Halbgruppe mit endlich vielen Erzeugenden und der Eigenschaft „Aus  $s_1^x = s_2^x$  folgt  $s_1 = s_2$ “ hat endlichen Rang  $n$  (Rang der Halbgruppe gleich Rang der aus ihr entstehenden Abelschen Quotientengruppe) und ist isomorph zu einem Teiler der freien Abelschen Halbgruppe aus  $n$  Erzeugenden. — Nach dem Auszug referiert.

H. L. Schmid (Berlin).

**Vandiver, H. S.:** The elements of a theory of abstract discrete semi-groups. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 71—86 (1940).

Eine Halbgruppe ist definiert als Menge mit assoziativer Multiplikation. Verf. betrachtet nach einigen vorbereitenden Betrachtungen das Analogon zu der Zerlegung einer Gruppe in die Nebenklassen einer Untergruppe. Es folgt eine zahlentheoretische Anwendung. Zum Schluß beweist Verf. folgende Verallgemeinerung eines bekannten Satzes: Ist  $n$  eine natürliche Zahl  $> 1$  und  $h(d)$  eine für alle  $d|n$  definierte Funktion, deren Werte Elemente einer kommutativen Halbgruppe sind, setzt man für  $n'|n$

$$F(n') = \prod_{d|n'} h(d), \quad P_0 = F(n) \quad \text{und} \quad P_i = \prod F\left(\frac{n}{p_1 p_2 \dots p_i}\right) \quad (i > 0),$$

wo das Produkt über alle Kombinationen von  $i$  verschiedenen Primzahlen  $p|n$  zu erstrecken ist, so gilt

$$h(n) \cdot \prod_1^{\left[\frac{s+1}{2}\right]} P_{2q-1} = \prod_1^{\left[\frac{s}{2}\right]} P_{2q},$$

wo  $s$  die Anzahl der in  $n$  aufgehenden Primzahlen ist. Artur Bischof (Berlin).

**Baer, Reinhold:** Nets and groups. 2. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 435—439 (1940).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 22, 11) werden Symmetrieeigenschaften von Geweben untersucht. Zuerst werden in einem System mit Linksdivision und Einheit die mit der Gleichung  $x(yz) = 1$  gleichbedeutenden Gleichungen aufgestellt und ihre Gültigkeit in einer kanonischen Darstellung untersucht. Das Ergebnis dient sodann zur weiteren Untersuchung spezieller Gewebe. J. J. Burckhardt.

## Analysis.

### Allgemeines:

● **Düsing, K.:** Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. Für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Beispielen aus der technischen Mechanik von Ernst Preger. 12. Aufl. Bearb. v. Ernst Wilde. Leipzig: Dr. Max Jänecke 1940. IX, 122 S. u. 91 Abb. RM. 3.20.

**Karlsen, Filip:** Einiges über Kettenbrüche. Norsk mat. Tidsskr. 22, 80—82 (1940) [Norwegisch].

### Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

● **Szegő, Gabor:** Orthogonal polynomials. (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. B<sup>1</sup> 23.) New York: Amer. Math. Soc. 1939.

**Bader, Wilhelm:** Beitrag zur Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit. Arch. Elektrotechn. 34, 293—300 (1940).

Verf. will die Schaltungsteile von Wechselstromwiderständen finden, die sich auf Grund ihrer vorgeschriebenen Frequenzabhängigkeit als Kettenschaltung aus nur zwei Widerstandsarten verwirklichen lassen. Die Aufg. führt mathematisch auf die Entwicklung einer ungeraden rationalen Funktion von  $x$  in einen Kettenbruch. Es wird ein Verfahren angegeben, durch das die Elemente des Kettenbruchs unabhängig



voneinander (also nicht rekursiv) aus den gegebenen Koeffizienten der rationalen Funktion berechnet werden können. *Rehbock* (Braunschweig).

**Bleick, W. E.:** A least squares accumulation theorem. *Ann. math. Statist.* **11**, 225—226 (1940).

Se  $A^*(x)$  und  $B^*(x)$  sind zwei Polynome desselben Grades, die, nach dem Methode der kleinsten Quadrate und relativ zum System der Werte  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , approximieren, dann sind die Funktionen  $A(x)$  und  $B(x)$ , identisch

$$\sum_{i=1}^p A^*(x_i) B(x_i) = \sum_{i=1}^p A(x_i) B^*(x_i) = \sum_{i=1}^p A^*(x_i) B^*(x_i).$$

*C. Miranda* (Torino).

**Offord, A. C.:** Approximation to functions by trigonometric polynomials. *Duke math. J.* **6**, 505—510 (1940).

Verf. gibt zunächst eine neue Lösung der Aufgabe, eine stetige Funktion durch eine gleichmäßig konvergente Folge trigonometrischer Interpolationspolynome zu approximieren: Ist  $f(x)$  stetig und bedeutet  $I_n(f, x)$  das trigonometrische Polynom  $n$ -ter Ordnung, das an den  $2n+1$  Stellen  $x_i = i \frac{2\pi}{2n+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ) die Werte  $\frac{1}{2}f(x_i) + \frac{1}{4}\{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\}$  annimmt, so konvergiert für  $n \rightarrow +\infty$  gleichmäßig  $I_n(f, x) \rightarrow f(x)$ . — Diese Konstruktion ist insofern besonders bemerkenswert, als sie sich in einfacher Weise auf beliebige integrierbare Funktionen erweitern läßt: Ist  $f(x)$  integrierbar und bildet man das trigonometrische Interpolationspolynom  $I_n(f, x)$  so, daß es an den  $2n+1$  Stellen  $x_i = i \frac{2\pi}{2n+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ) die Werte

$$f_n(x_i) = \frac{1}{2\Delta_n} \int_{x_i - \Delta_n}^{x_i + \Delta_n} f(t) dt \quad \text{mit} \quad \Delta_n = \frac{2k_n\pi}{2n+1}$$

der Einschränkung  $\Delta_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow +\infty$  unterworfen ist, so konvergiert für  $n \rightarrow +\infty$  fast überall  $I_n(f, x) \rightarrow f(x)$ . *F. Lösch* (Rostock).

**Tricomi, Francesco:** Sulle serie di polinomi di Legendre. *Atti Accad. Sci. Torino* **75**, 369—390 (1940).

Ziel der Arbeit ist eine für Vorlesungszwecke geeignete Ableitung des Satzes von der Entwickelbarkeit in  $(-1, +1)$  stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Funktionen  $f(x)$  nach Legendreschen Polynomen. Zum Nachweis, daß die in Fourierscher Weise gebildete Reihe im Innern des Intervalls  $(-1, +1)$  die Funktion  $f(x)$  darstellt, ist eine asymptotische Abschätzung der Form  $P_n(x) = O(n^{-1/2})$  erforderlich. Diese erhält Verf. dadurch, daß er die Funktionen  $D_1(\theta, \varphi) = (1 - e^{-i\theta} e^{i\varphi})^{-1/2}$ ,  $D_2(\theta, \varphi) = (1 - e^{i\theta} e^{i\varphi})^{-1/2}$  für  $\varphi \neq \theta, 2\pi - \theta$  in eine binomische Reihe entwickelt und damit die überall stetige Funktion  $F(\varphi) = D_1(\theta, \varphi) D_2(\theta, \varphi) - D_1(\theta, \varphi) D_2(\theta, \theta) - D_1(\theta, 2\pi - \theta) D_2(\theta, \varphi)$  bildet. Die  $n$ -ten Fourierkoeffizienten von  $F(\varphi)$  sind also von der Ordnung  $\frac{1}{n}$ , so daß unter Heranziehung der erzeugenden Funktion der  $P_n(x)$  sich die Abschätzung

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin \theta}} \cdot \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + O\left( \frac{1}{n} \right) \quad 0 < \theta < \pi$$

findet; der erste Faktor der rechten Seite ist nach bekannten elementaren Methoden durch  $\frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O(n^{-3/2})$  abzuschätzen, so daß sich für die normierten Kugelfunktionen

die Abschätzung  $|\sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)| < C(\delta)$  für  $|x| \leq 1 - \delta$ ,  $\delta > 0$  ergibt. Dies reicht aus, um die gleichmäßige und absolute Konvergenz der zu  $F(x)$  gehörenden Entwicklungsreihe in  $(-1 + \delta, 1 - \delta)$  sicherzustellen. — Weiterhin bringt Verf. einige spezielle Entwicklungen nach Legendreschen Polynomen, nämlich für  $F(x) = |x|$ ,

$$\sqrt{2(1-x)}, \log \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{1-x}} \right) \text{ u. a.}$$

*Harald Geppert* (Berlin).

**Geronimus, J.: Generalized orthogonal polynomials and the Christoffel-Darboux formula.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 847—849 (1940).

Wird

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_1 \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = \Delta_{n,n} z^n - \Delta_{n,n-1} z^{n-1} + \dots + (-1)^n \Delta_{n,0} = \Delta_{n,n} P_n(z) \quad (c_{-k} = \bar{c}_k)$$

gesetzt und ist  $\{c_n\}_0^\infty$  eine komplexe Zahlenfolge, für welche  $\Delta_{n,n} \neq 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) gilt, so sind die Polynome  $P_n(z)$  nach Achyzer und Krein orthogonal in bezug auf die Folge  $\{c_n\}_0^\infty$  in folgendem Sinne:

$$L\left\{P_n(z) \bar{P}_m\left(\frac{1}{z}\right)\right\} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\Delta_{n+1,n+1}}{\Delta_{n,n}} & n = m, \end{cases} \quad \text{für}$$

wo  $L$  das lineare Funktional  $L(z^k) = c_k$  bedeutet [im Falle  $\Delta_{n,n} > 0$  gilt  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma(\theta)$ ,

und es handelt sich um gewöhnliche Orthogonalität auf  $|z|=1$  mit dem Gewichte  $d\sigma(\theta)$ ]. — Verf. beweist für diese orthogonalen Polynome  $P_n(z)$  die Gültigkeit der Rekursionsformel

$$P_{n+1}(z) = z P_n(z) + \frac{\Delta_{n+1,0}}{\Delta_{n+1,n+1}} P_n^*(z), \quad P_n^*(z) = z^n \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

und leitet die Darboux-Christoffelsche Formel für diese Polynome her. *E. Egerváry.*

**Geronimus, J.: On the orthogonality of a system of polynomials on several contours.** Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 12—30 u. engl. Zusammenfassung 30—32 (1940) [Russisch].

Soit  $C$  un contour analytique dans le plan de  $z$  et  $n(z)$  une fonction positive et continue sur  $C$ , telle qu'il existe une fonction régulière  $D(z)$ , différente de zéro à l'extérieur de  $C$  et  $\lim_{z \rightarrow z_0} D(z)^2 = n(z_0)$ ,  $z_0$  sur  $C$ . Soit  $w = \gamma(z)$  la fonction qui réalise

la représentation conforme du domaine  $|w| > r_0$  sur le domaine extérieur de  $C$ , les points à l'infini étant correspondants et  $\lim_{z \rightarrow \infty} \gamma(z)/z = 1$ . Désignons par  $C_r$  les images

de  $|w| = r > r_0$ . L'auteur démontre les théorèmes: Les nombres  $\gamma_k(r)/\gamma_0(r)$ , où  $\gamma_k(r) = \int_{C_r} |D(z)|^2 z^k |dz|$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , sont indépendants de  $r$  seulement dans le cas

où le contour  $C$  et la fonction  $n(z)$  sont du type suivant: A)  $C$  est une courbe de la famille  $C_r$ , définie par  $|G_k(z) + \sqrt{G_k^2(z) - 4\alpha^{2k}}| = 2r^k$ ,  $G_k(z)$  étant un polynome arbitraire de degré  $k$ ,  $G_k(z) = z^k + \dots$ . Cette courbe correspond à la valeur  $r_0 > |\alpha|$  de  $r$ , pour laquelle le plus petit polygone convexe qui contient tous les zéros de  $G_k(z)$  se trouve dans  $C_r$ . La fonction  $n(z)$  est donnée par

$$n(z) = \left| \sqrt{\frac{G_k(z) + 2\alpha^k}{G_k(z) - 2\alpha^k}} G'_k(z) \right|, \quad 0 < |\alpha| < r_0; \quad n(z) = \left| \frac{G'_k(z)}{(G_k(z) - \lambda^k)^2} \right|, \quad \alpha = 0, \quad |\lambda| \leq r_0.$$

B) Le contour  $C$  est arbitraire et  $n(z) = |\gamma'(z)|$ . L'auteur considère aussi deux types (A) et (B) de polynomes orthogonaux suivant  $C_r$ . (A)  $\int_{C_r} |D(z)|^2 P_n(z, r) \bar{P}_m(z, r) |dz| = \varepsilon_{m,n}$ ,

(B)  $\int_{C_r} |D(z)|^2 P_n(z, r) P_m(z, r) |dz| = \varepsilon_{m,n}$  et la fonction  $Q_n(y; r) = \int_{C_r} \frac{|D(z)|^2 P_n(z, r)}{y - z} |dz|$

pour les polynomes de (A). Il démontre le théorème: La condition  $Q_0(y; r) = f_0(r) Q_0(y; r_0)$ ,  $r > r_0$  est nécessaire et suffisante pour que le système de polynomes (B) orthogonaux sur  $C$  soit (B) orthogonaux sur chaque  $C_r$ . Pour les systèmes (A) orthogonaux le même rôle jouent les conditions  $Q_s(y; r) = f_s(r) Q_0(y; r_0)$ ,  $s = 0, 1$ .

*N. Obrechhoff (Sofia).*



**Schwetzwow, K. I.:** Über das Momentenproblem von Hamburger bei der zusätzlichen Bedingung, daß ein gegebenes Intervall frei von Massen sei. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 121—128 u. deutsch. Zusammenfassung 128 (1940) [Russisch].

Kriterien für Lösbarkeit und Bestimmtheit des Momentenproblems  $C_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k d\varphi(u)$  unter der Annahme, daß die nichtabnehmende Funktion  $\varphi(u)$  konstant ist in einem Intervall  $(\alpha, \beta)$ , werden in Anlehnung an Riesz [Ark. Mat. Astron. Fys. 17, Nr 16 (1923)] gebracht. *Hoheisel* (Köln-Lindenthal).

**Bernstein, S.:** Sur la meilleure approximation locale des fonctions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 843—846 (1940).

Verf. beweist folgenden Satz: Die Funktion  $f(x)$  hat im abgeschlossenen Intervalle  $(a, b)$  dann und nur dann eine stetige  $(n+1)$ -te Derivierte, wenn gleichmäßig für  $\beta \rightarrow x_0, \alpha \rightarrow x_0$

$$\frac{E_n[f(x); \alpha, \beta]}{(\beta - \alpha)^{n+1}} \rightarrow \lambda(x_0). \quad (a \leq x_0 \leq b, \alpha < \beta)$$

Hier bedeutet  $E_n[f(x); \alpha, \beta]$  das Maß der besten Approximation von  $f(x)$  in  $(\alpha, \beta)$  durch Polynome  $n$ -ten Grades, und die stetige Funktion  $\lambda(x)$  ist bestimmt durch  $2^{2n+1}(n+1)! \lambda(x) = |f^{(n+1)}(x)|$ . Zum Beweise werden Sätze von Tschebyscheff, Markoff und Raikov (dies. Zbl. 22, 216) herangezogen. *E. Egerváry* (Budapest).

**Brzecka, V.:** Sur un problème d'extremum. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 33—42 u. franz. Zusammenfassung 43—44 (1940) [Russisch].

Partant d'un résultat de Achyesser et Krein (ce Zbl. 13, 109) l'aut. démontre que le minimum de l'expression  $\int_{-1}^{-\beta} |J_n(x)| dx + \int_{\beta}^1 |J_n(x)| dx, 0 < \beta < 1$  où  $J_n(x)$  est un polynome de degré  $n$  dont le coefficient de  $x^n$  est égal à 1, est égal à  $(1 - \beta^2)^m 4^{1-m}$  si  $n = 2m - 1$  et égal à  $(1 - \beta)^{m+1} (1 + \beta)^m 2^{-2m+1}$  si  $n = 2m$ . De ce résultat il tire le suivant:

$$\min_{-1}^1 |x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n| \frac{dx}{\sqrt{x+a}} = 2^{1-n} (\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}), \quad a > 1,$$

d'où pour  $a \rightarrow \infty$  il obtient  $\min_{-1}^1 |x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n| dx = 2^{1-n}$ , ce qui est la résolution d'une question posée par Korkine et Zolotareff (Nouvelles Ann. Math. 1873). *N. Obrechhoff* (Sofia).

### Folgen und Reihen:

**Dávid, Ludwig v.:** Verallgemeinerung iterativer Matrizen. Mat. termézet. Értes. 59, Tl 1, 62—69 u. deutsch. Zusammenfassung 70—71 (1940) [Ungarisch].

Aus den bekannten Konvergenzbeweisen für den Gaußschen Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels und seiner Verallgemeinerungen, wie z. B. des Borchardt'schen Algorithmus, im Komplexen kristallisiert Verf. einen allgemeinen Konvergenzsatz heraus.  $(a_i^{(k)})$ ,  $i = 1 \dots n$ ,  $k = 1 \dots \infty$  sei eine Matrix mit unendlichvielen Spalten, in der  $a_{M(k)}^{(k)}$  das absolut größte Element der  $k$ -ten Spalte bezeichnet; es sei

$$a_{M(k)}^{(k)} = f_k(a_1^{(k-1)}, \dots, a_n^{(k-1)}), \quad (k = 1 \dots \infty)$$

worin die  $f_k$  eindeutige, stetige, mittelwertartige (d. h.  $f_k(|z|, |z|, \dots, |z|) = |z|$ ), im Reellen monoton wachsende Funktionen sind, für die  $|f_k(z_1 \dots z_n)| \leq f_k(|z_1|, \dots, |z_n|)$  ist; es gebe nur endlichviele verschiedene Funktionen  $f_k$ ; dann gilt:

$$\lim |a_1^{(k)}| = \lim |a_2^{(k)}| = \dots = \lim |a_n^{(k)}|. \quad (1)$$

Um zu einer analogen Beziehung in den Argumenten zu kommen, genügt folgende hinreichende Bedingung: Es bezeichne  $\psi_k$  die Öffnung des kleinsten Winkels um  $O$ , der die Halbstrahlen  $Oa_i^{(k)}$  ( $i = 1 \dots n$ ) enthält;  $D_{k, k+1}$  sei die Breite des kleinsten Kreisinges um  $O$ , der sämtliche Elemente  $a_i^{(k)}$  und  $a_i^{(k+1)}$  ( $i = 1 \dots n$ ) enthält. Existiert ein  $t$ , so daß für  $0 < a < \psi_k < t$ ,  $D_{k, k+1} \geq p(a) > 0$  wird, worin  $p(a)$  nicht von  $k$  abhängt, so ist unter der Voraussetzung (1) auch  $\lim \psi_k = 0$ . *Harald Geppert.*

**Facciotti, Guido: Progressioni geometriche a termini periodicamente alternati.** Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 369—370 (1940).

Verf. summiert verallgemeinerte geometrische Reihen vom Typus

$$\sum_{i=1}^v (q^i - q^{v+i} + q^{2v+i} - \dots + (-1)^{\alpha-1} q^{\alpha v+i}) \\ = (-1)^{\alpha+1} q \{q^{\alpha v} + (-1)^{\alpha+1}\} \{q^v - 1\} / \{q^v + 1\} \{q - 1\}$$

und solche, die hieraus durch Lückenbildung an gleichgeordneten Stellen mod  $v$  entstehen. *Harald Geppert (Berlin).*

**Caton, Willis B.: A class of inequalities.** Duke math. J. 6, 442—461 (1940).

Untersucht wird, wann ein  $K < \infty$  existiert, so daß für jede konvergente Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_1^\infty a_n \leq K \left\{ \sum_1^\infty (n^{\beta_1} a_n^{\alpha_1})^{p_1} \right\}^{\frac{1}{p_1}} \left\{ \sum_1^\infty (n^{\beta_2} a_n^{\alpha_2})^{p_2} \right\}^{\frac{1}{p_2}},$$

wobei  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ ,  $\infty > p_i > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1$ ,  $p_3(\beta_1 + \beta_2) = 1$ . Das Problem läßt sich auffassen als Grenzfall einer Hölderschen Ungleichung. Für den Fall  $\alpha_1 p_1 = \alpha_2 p_2$  wird  $\beta_1 p_1 = \beta_2 p_2$  als notwendige und hinreichende Bedingung erkannt und die beste Konstante  $K$  unter Benutzung der Gammafunktion angegeben. Im Falle  $\alpha_1 p_1 - 1 > \alpha_2 p_2 - 1 > 0$  wird  $\beta_1 p_1 \neq \alpha_1 p_1 - 1$  als notwendig und hinreichend erwiesen. *Theodor Kaluza jun.*

**Hayashi, Gorō, and Shin-ichi Izumi: Theorems on Nörlund's method of summation. 1.** Tôhoku Math. J. 47, 6—13 (1940).

Es sei  $p_0 \neq 0$ ,  $p_1, p_2, \dots$  eine gegebene Folge und  $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$ . Die Folge  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$  heißt  $(R, p)$ -limitierbar bzw.  $(N, p)$ -limitierbar, wenn  $(p_0 s_0 + p_1 s_1 + \dots + p_n s_n) / P_n$  bzw.  $(p_n s_0 + p_{n-1} s_1 + \dots + p_0 s_n) / P_n$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$ . Die Verff. leiten in diesem ersten Teil für die  $N$ -Summierbarkeit eine Reihe von Vergleichssätzen, notwendigen Summierbarkeitskriterien und Tauberschen Sätzen her, von denen die beiden folgenden zitiert seien. Vergleichssatz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die  $(N, p)$ -Summierbarkeit die  $(N, q)$ -Summierbarkeit umfaßt

$[(N, q) \subset (N, p)]$ , ist, daß  $D_{n-v} / P_n = o(1)$  und  $\sum_{v=0}^n |D_{n-v}| |Q_v| / |P_n| = O(1)$  für  $n \rightarrow \infty$ ,

wobei die  $(n - v + 1)$ -reihige Determinante  $D_{n-v}$  aus den Reihen  $p_0, 1, 0, \dots, 0$ ;  $p_1, q_1, 1, 0, \dots, 0$ ;  $p_2, q_2, q_1, 1, 0, \dots, 0$ ;  $p_{n-v}, q_{n-v}, \dots, q_1$  gebildet wird. Umkehr-

satz: Es sei  $\varepsilon$  eine feste Zahl  $\geq 0$ ,  $p_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^\infty p_n P_n^{-(1+\varepsilon)} < \infty$ ; aus  $P_n^{1+\varepsilon} a_n / p_n = o(1)$

und der  $(N, p)$ -Summierbarkeit von  $\sum a_n$  folgt die gewöhnliche Konvergenz von  $\sum a_n$ .

*Meyer-König (Stuttgart).*

**Hayashi, Gorō, and Shin-ichi Izumi: Theorems on Nörlund's method of summation. 2.** Tôhoku Math. J. 47, 69—73 (1940).

Die vorstehend besprochene Arbeit wird fortgesetzt und der folgende Satz Mercerscher Art bewiesen: Es sei  $p_n \geq p_{n+1} > 0$ ,  $q_n \geq q_{n+1} > 0$  und  $\sum_{n=1}^\infty q_n / P_n < \infty$ ; dann

zieht die Konvergenz der Folge  $x_n + q_n(p_n x_1 + p_{n-1} x_2 + \dots + p_1 x_n) / P_n$  die Konvergenz der Folge  $x_n$  nach sich. In einem weiteren Satz werden Bedingungen für die Folge  $p_n$  angegeben, unter denen das Nörlundsche  $(N, p)$ -Verfahren und das Rieszsche  $(R, p)$ -Verfahren äquivalent sind. *Meyer-König (Stuttgart).*



Lyra, Gerhard: Über den Zusammenhang einiger Reihensätze. Math. Z. 46, 627 bis 634 (1940).

1. Hardy und Littlewood [Math. Z. 19, 67—96 (1924), insbes. 72, Lemma 2 und 3] haben den folgenden Satz (A) angegeben: Dann und nur dann ist  $C_{p+1}\text{-}\sum (n+1)\Delta a_n = s$ , wenn  $C_p\text{-}\sum (a_n - A) = s$  ist für eine geeignete Konstante  $A$  ( $p \geq -1$ , ganz;  $\Delta a_n = \Delta^1 a_n = a_n - a_{n+1}$ ;  $C_{-1}\text{-}\sum a_n = s$ , wenn gleichzeitig  $\sum a_n = s$  und  $na_n \rightarrow 0$ ). Verf. zeigt erstens, wie der Sonderfall  $p=0$  dieses Satzes (er werde mit  $(A_1)$  bezeichnet) umgeformt werden kann zu dem folgenden notwendigen und hinreichenden Kriterium  $(B_1)$  für  $C_1$ -Summierbarkeit von Knopp [S.-B. Berlin. math.

Ges. 16, 45—50 (1917)]: Dann und nur dann ist  $C_1\text{-}\sum a_n = s$ , wenn  $\sum_{v=0}^n a_v + (n+1)\sum_{v=n+1}^{\infty} v^{-1}a_v \rightarrow s$  strebt. Zweitens wird aus (A) der folgende Satz abgeleitet: Falls

$V\text{-}\lim a_n = 0$  ist ( $V$  bedeute ein permanentes, mit dem  $C$ -Verfahren verträgliches Limitierungsverfahren), so ist dann und nur dann  $C_p\text{-}\sum a_n = s$ , wenn  $C_{p+1}\text{-}\lim (s_n - (n+1)a_{n+1}) = s$  ist. Es ist dies eine Verallgemeinerung und Verschärfung eines Satzes von Ostrowski [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 34, 161—171 (1926)], wonach  $\sum a_n$  mit monoton zu 0 abnehmenden Gliedern dann und nur dann zur Summe  $s$  konvergiert, wenn  $s_n - (n+1)a_{n+1} \rightarrow s$  strebt. Eine solche Verschärfung, jedoch nicht so weitreichend, wurde früher vom Ref. (dies. Zbl. 22, 17) angegeben: der dabei zum Beweis benützte Hilfssatz erweist sich als ein Spezialfall von (A). — 2.  $(B_1)$  ist ein Sonderfall eines allgemeineren Kriteriums  $(B)$  von Knopp [Math. Z. 19, 97—113 (1924), Satz 4], das seinerseits vom Verf. in einer früheren Arbeit [Math. Z. 45, 559 bis 572 (1939), Satz 1; dies. Zbl. 23, 26] verallgemeinert wurde zu einem Satz  $(B')$ . Entsprechend der Proportion  $(B_1):(A_1) = (B'):(A')$  kommt nun Verf. zu dem folgenden, eine Verallgemeinerung von (A) darstellenden Satz  $(A')$ : Dann und nur dann ist  $C_{p+r}\text{-}\sum \binom{n+r}{r} \Delta^r a_n = s$ , wenn  $C_p\text{-}\sum [a_n - (A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} + \dots + A_r)] = s$  ist für  $r$  geeignete Konstante  $A_1, \dots, A_r$  ( $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_n - \Delta^1 a_{n+1}$ , usw.). Weiter wird ein mit  $(B')$  äquivalenter Satz (Verf. a. a. O., Satz II) umgeformt und daraus  $(A')$  erneut hergeleitet. In einem Zusatz bei der Korrektur weist Verf. darauf hin, daß der wesentliche Inhalt von  $(A')$  schon von A. F. Andersen [Proc. London Math. Soc. (2) 27, 39—71, insbes. 44 (1928)] bewiesen wurde. — 3. Zum Schluß eine Bemerkung über die Erweiterung der in Rede stehenden Sätze auf den Fall  $p$  ganz,  $< -1$ . Meyer-König.

Foà, Alberto: Sulla sommabilità assoluta  $|C, \alpha|$  delle serie di Fourier di una funzione sommabile  $L^p$  con  $p > 1$ . Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 325—332 (1940).

Die absolute  $|C, \alpha|$ -Summierbarkeit in einem Punkt  $x_0$  einer Fourierschen Reihe einer  $L$ -integrierbaren Funktion  $f(x)$  ist für  $\alpha > 1$  ein Lokalphänomen, d. h. die absolute  $|C, \alpha|$ -Summierbarkeit hängt für  $\alpha > 1$  nur vom Verhalten der Funktion in der Umgebung des Punktes  $x_0$  ab (Bosanquet, dies. Zbl. 15, 64). Jedoch für  $0 < \alpha < 1$  ist es kein Lokalphänomen (A. Foà, dies. Zbl. 20, 112). In der vorliegenden Arbeit beweist Verf., daß die absolute  $|C, \alpha|$ -Summierbarkeit in einem Punkt  $x_0$  einer Fourierschen Reihe einer  $L^p$ -integrierbaren Funktion  $f(x)$  ( $p \geq 1$ ) ein Lokalphänomen ist oder nicht, je nachdem  $\alpha > 1/p$  oder  $0 < \alpha \leq 1/p$  ist. L. Cesari (Pisa).

Achyeser, N., and M. Krein: Some remarks about three papers of M. S. Verblunsky. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 129—134 (1940).

Die Verff. bemerken, daß sie in ihren Untersuchungen „Über Fouriersche Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem“ I., II. (dies. Zbl. 10, 351; 11, 207), und „Das Momentenproblem bei der zusätzlichen Bedingung von A. Markoff“ (dies. Zbl. 13, 109) Ergebnisse erhalten haben, welche die Resultate von Verblunsky (dies. Zbl. 14, 153) enthalten. Rolf Nevanlinna (Helsinki).

**Cesari, Lamberto:** *Sulle funzioni di più variabili generalmente a variazione limitata e sulla convergenza delle relative serie multiple di Fourier.* Comment. Pontif. Acad. Sci. **3**, 171—197 (1939).

L'au. généralise ses résultats sur les fonctions à deux variables de variation bornée et les séries doubles de Fourier (ce Zbl. **14**, 296; **17**, 255) pour les fonctions à plusieurs variables et pour les séries correspondantes de Fourier. Des conditions supplémentaires sont introduites.

N. Obrechhoff (Sofia).

### **Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:**

**Lewitan, B.:** *Die Verallgemeinerung der Operation der Verschiebung im Zusammenhang mit fastperiodischen Funktionen.* Rec. math. Moscou, N. s. **7**, 449—474 (1940).

Es wird eine Schar  $T^s$  ( $-\infty < s < \infty$ ) von linearen Transformationen der Gesamtheit der beschränkten stetigen Funktionen  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) in sich betrachtet, die gewisse Eigenschaften mit der Schar der gewöhnlichen Verschiebungstransformationen  $f(x) \rightarrow f(s+x)$  gemein hat. Eine stetige Funktion  $f(x)$  heißt dann fastperiodisch in bezug auf die Schar  $T^s$  der verallgemeinerten Verschiebungstransformationen, wenn die Gesamtheit der verschobenen Funktionen  $T^s f(x)$  im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz kompakt ist. Wenn man noch die Mittelwerte  $M[f(x)]$  als im Banach-

schen Sinne verallgemeinerte Grenzwerte  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx$  definiert, dann lassen sich

die Hauptsätze der Bohrschen Theorie der stetigen fastperiodischen Funktionen auch auf diesen allgemeineren Fall ausdehnen. Natürlich hängt der Mittelwert  $M[f(x)]$  im allgemeinen von der speziellen Definition des Banachschen Grenzwertbegriffes ab. Es wird aber eine Bedingung für  $T^s$  gefunden, die die Einzigkeit des Mittelwertes für fastperiodische Funktionen sichert. — Die Theorie läßt u. a. Anwendungen auf die Differentialgleichungen  $u'' - \varrho(x)u = \lambda u$  mit den Anfangsbedingungen  $u(\lambda, 0) = 1$ ,  $u'(\lambda, 0) = 0$ , zu.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

**Avakumović, Vojislav G.:** *Über das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes.* Math. Z. **46**, 650—664 (1940).

Es wird ein Taubersatz für Dirichletsche Reihen bewiesen, der die Hardy-Littlewoodschen Umkehrsätze (mit einer Koeffizientenbedingung, der „Konvergenzbedingung“, als Voraussetzung) und Sätze eines neueren Typus (funktionentheoretische Taubersätze mit Voraussetzungen funktionentheoretischer Art über die durch die Reihe dargestellte Funktion) verbindet [vgl. etwa A. E. Ingham, Proc. London Math. Soc. (2) **38**, 458—480 (1935); dies. Zbl. **10**, 352—353]. Der Satz lautet: Es sei

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$  und die durch  $J(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$  für  $\Re(s) > 0$  definierte

Funktion genüge den Voraussetzungen: (I)  $J(s)$  ist gleichmäßig beschränkt in einem konvexen Gebiet  $D_k$ , dessen Begrenzung im Punkt  $s = 0$ , der nicht zu  $D_k$  gehöre, eine Berührung von der Ordnung  $k-1$  ( $k > 1$ ) mit der imaginären Achse hat;

(II) es ist

$$(1) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} J(\delta + s) dt = A + o(1) \quad \text{bei} \quad y \rightarrow \infty,$$

wobei  $s = |t|^k + iat$  ( $a$  reell  $\neq 0$ ) in  $D_k$  liegt. Ferner sei  $A_n = a_1 + \dots + a_n$  gesetzt,

$$(2) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{\lambda_n \leq \lambda_\nu \leq \lambda_n + \varepsilon \lambda_n^{1/k}} \{A_\nu - A_n\} = -w(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{bei} \quad 0 < \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dann ist  $A_n = A + o(1)$  bei  $n \rightarrow \infty$ . Etwas allgemeiner wird gezeigt: Satz A. Die

durch  $J(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u) du$  für  $\Re(s) > 0$  definierte Funktion genüge den Voraussetzungen (I) und (II) und es sei

$$(2') \quad \liminf_{u \rightarrow \infty} \min_{u \leq u' \leq u + \varepsilon u^{1/k}} \{A(u') - A(u)\} = -w(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{bei} \quad 0 < \varepsilon \rightarrow 0;$$



dann ist

$$(3) \quad A(u) = A + o(1) \quad \text{bei} \quad u \rightarrow \infty.$$

Ein Schritt zum Beweis dieses Satzes ist Satz *B*, der aus Satz *A* dadurch hervorgeht, daß die *o*-Bedingungen (1), (2'), (3) durch die entsprechenden Bedingungen vom Typus *O* ersetzt werden. Verf. merkt an, daß er diese Ergebnisse ohne Beweis schon früher [C. R. 2. Congr. interbalkan. Math. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 101—106 (1938); dies. Zbl. **20**, 16—17] mitgeteilt und mit Beweis in seine (noch nicht gedruckte) Dissertation (Belgrad 1938) aufgenommen hat, ferner, daß inzwischen N. Wiener und H. R. Pitt (dies. Zbl. **23**, 48) mit andersartiger Beweismethode zu fast denselben Ergebnissen gelangt sind. Meyer-König.

Selberg, Atle: Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist. Arch. Math. og Naturvid. B **43**, Nr 4, 1—4 (1940).

Vorbereitende kurze Note über folgenden Gegenstand: Sind

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i n \tau}, \quad \varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{2\pi i n \tau}$$

zwei ganze Spitzenformen der vollen Modulgruppe von der Dimension  $-k$  ( $k \geq 12$  und gerade), so setze man mit  $\zeta(s)$  als Riemannscher  $\zeta$ -Funktion

$$\zeta_{f, \varphi}(s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_n}{n^{k-1+s}}.$$

Die Eigenschaften dieser Dirichlet-Reihe sind im Falle  $f = \varphi$  von R. A. Rankin untersucht worden [dies. Zbl. **21**, 392; Proc. Cambridge Philos. Soc. **36**, 150—151 (1940), Referat folgt später]. Die angekündigte Darstellung des Verf. wird allem Anschein nach eine Verallgemeinerung der Untersuchungen von Rankin auf den Fall  $f = \varphi$  oder  $f \neq \varphi$  enthalten. Petersson (Prag).

### Spezielle Funktionen:

Palamà, G.: Su delle relazioni integrali relative ai polinomi di Laguerre e d'Hermite. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **10**, 46—54 (1939).

Thiruvenkata Char, V. R.: Note on some formulae involving the Laguerre and Hermitian polynomials and Bessel functions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **10**, 229—234 (1939).

Kurze Beweise folgender bekannter Ergebnisse: 1. aus der Theorie der Laguerreschen Polynome  $L_n^{(\alpha)}(x)$ : Wigerts Integraldarstellung für  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , die gewöhnliche und die Hillesche Erzeugende; 2. aus der Theorie der Besselschen Funktionen: das erste und zweite Webersche Exponentialintegral; 3. aus der Theorie der Hermiteschen Polynome: die Relation von Szegő zwischen den Hermiteschen Polynomen und den Laguerreschen Polynomen  $L_n^{(+)}$  bzw.  $L_n^{(-)}$ , die Formeln von Doetsch für  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s x^2} H_{2n}(x) dx$  und  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s x^2} H_{2n+1}(x) x dx$ . Anscheinend neue Ergebnisse sind eine Integralgleichung für  $e^{-x} x^{n+\alpha} L_n^{(\alpha+n)}(x)$  mit  $\alpha > -\frac{1}{2}$  (Kern  $J_{2\alpha}(2\sqrt{xt})$ ) und je eine Integralgleichung für  $e^{-x^2} x^n H_{2n}(x)$  bzw.  $e^{-x^2} x^n H_{2n+1}(x)$  (Kern  $\sqrt{xt} J_{-n \pm \frac{1}{2}}(2xt)$ ). Schoblik (Brünn).

Dhar, S. C.: Note on the addition theorem of parabolic cylinder functions. J. Indian Math. Soc., N. s. **4**, 29—30 (1940).

The author obtains a number of expansions which are all included in the formula  $D_n(ay + bz) D_m(by - az)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (b/r)^{m+k} (a/r)^{n-k} C_{n,k} F(-k, -m; n-k+1; -a^2/b^2) D_{n+m-k}(ry) D_k(rz),$$

where  $r^2 = a^2 + b^2$ ,  $R(m) > 0$ ,  $R(n) > 0$ . The formula also holds for  $m = 0$  and then reduces to a generalisation of Kamp de Fériets addition formula for the Hermite

polynomial which was published in Denmark in 1923 and later in Appell and Kampé de Fériets „Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite“ (1926). An extension to the function  $D_n(x)$  was given by the reviewer in Bull. Amer. Math. Soc. 1935; dies. Zbl. 13, 18.

H. Bateman (Pasadena).

Müller, Reinhard: Über die partielle Ableitung der Besselschen Funktionen nach ihrem Parameter. Z. angew. Math. Mech. 20, 61—62 (1940).

Für ganzzahlige Werte des Index  $\nu$  lassen sich die Funktionen  $\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) = J^*(z, \nu)$  und  $\frac{\partial}{\partial \nu} Y_\nu(z) = Y^*(z, \nu)$  als lineare Kombinationen der  $J_n(x)$ ,  $Y_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots, \nu$ ) ausdrücken. Es wird z. B.

$$J^*(z, 0) = \frac{\pi}{2} Y_0(z); \quad J^*(z, \pm 1) = z^{-1} J_0(z) \pm \frac{\pi}{2} Y_1(z); \dots$$

als leichte Folgerung aus den bekannten Rückschlußformeln bezüglich des Index.

Harald Geppert (Berlin).

Horn, J.: Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen im Schnittpunkt dreier Singularitäten. Math. Ann. 117, 579—586 (1940).

Es werden Zusätze und Berichtigungen zum Abschnitt I einer früheren Arbeit gleichen Titels [Math. Ann. 115, 435—455 (1938); dies. Zbl. 18, 122] gegeben.

Haupt (Erlangen).

Geppert, Harald: Wie Gauss zur elliptischen Modulfunktion kam. Deutsche Math. 5, 158—175 (1940).

Ausführliche Schilderung der Gedankengänge, die Gauss zur Entdeckung der elliptischen Modulfunktion geführt haben, wobei in sehr bequemer Weise fortlaufend Verweise auf die als Beleg dienenden Stellen der Werke von Gauss gegeben sind. Im Mittelpunkt steht die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels, die von Gauss anfänglich elementar für reelle Argumente entwickelt und allmählich mehr und mehr ausgedehnt und mit anderen Gegenständen, wie elliptischen Integralen, einer Legendreschen Differentialgleichung, den Nullwerten der elliptischen Thetafunktionen, in Zusammenhang gebracht wird. Letztere leisten eine Uniformisierung des Algorithmus des a. g. M. Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den unendlich vielen Zweigen des a. g. M. bei komplexen Argumenten, die durch geänderte Wahl der unendlich vielen in den Algorithmus eingehenden Quadratwurzeln entstehen, hat Gauss schließlich zur elliptischen Modulfunktion geführt. — Im Gegensatz zu der von Schlesinger in seinem Essai „Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie“ (C. F. Gauss' Werke X<sub>2</sub>, Abh. 2, S. 93; dies. Zbl. 6, 338) geäußerten Ansicht macht Verf. es sehr wahrscheinlich, daß Gauss die entscheidende Formel, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Zweigen des a. g. M. aufhellt, anfänglich nicht von den Transformationsformeln für die Thetafunktionen her, sondern direkt aus dem Algorithmus selbst gefunden hat.

Bessel-Hagen (Bonn).

Maass, Hans: Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1940, 1—26 (Abh. 2).

Verf. überträgt einige Sätze der von H. Petersson entwickelten Theorie der Grenzkreisgruppen (dies. Zbl. 17, 306) auf eine Gruppe  $G$  von  $n$  simultanen linear gebrochenen Transformationen in  $n$  Veränderlichen

$$S = \{S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(n)}\} = \left\{ \frac{\alpha^{(1)} \tau^{(1)} + \beta^{(1)}}{\gamma^{(1)} \tau^{(1)} + \delta^{(1)}}, \frac{\alpha^{(2)} \tau^{(2)} + \beta^{(2)}}{\gamma^{(2)} \tau^{(2)} + \delta^{(2)}}, \dots, \frac{\alpha^{(n)} \tau^{(n)} + \beta^{(n)}}{\gamma^{(n)} \tau^{(n)} + \delta^{(n)}} \right\},$$

die den Teilraum  $\mathfrak{T}$ , definiert durch  $\Im m \tau^{(\nu)} > 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), in sich überführen. Zunächst wird in Anlehnung an die Verfahren für  $n = 1$  (vgl. H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche. 1923) gezeigt, daß  $G$  in  $\mathfrak{T}$  genau dann diskontinuierlich ist, wenn  $G$  keine infinitesimalen Substitutionen enthält. Es folgt eine Einteilung in parabolische, elliptische und hyperbolische Substitutionen, wobei eine Substitution nur dann parabolisch bzw. elliptisch genannt wird, wenn alle  $n$  Komponentensub-



stitutionen parabolisch bzw. elliptisch sind; alle anderen Substitutionen heißen hyperbolisch. Der Punkt  $\infty = \{\infty, \infty, \dots, \infty\}$  heißt parabolische Spitze für  $G$ , wenn in der affinen Gruppe  $A$  von  $G$   $n$  unabhängige Translationen enthalten sind und die Höchstzahl  $n-1$  der linear unabhängigen Multiplikatoren  $\lambda^2 = \{\lambda^{(1)^2}, \lambda^{(2)^2}, \dots, \lambda^{(n)^2}\}$  der hyperbolischen Substitutionen  $S = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ , die  $\infty$  fest lassen, erreicht wird. Dabei heißen  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots$

linear unabhängig, wenn die Vektoren  $\log \lambda_1^2, \log \lambda_2^2, \dots$  linear unabhängig sind. Schließlich heißt  $s = \{s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(n)}\}$  mit  $s = A^{-1}\infty$  parabolische Spitze für  $G$ , wenn  $\infty$  parabolische Spitze für  $AGA^{-1}$  ist,  $A$  eine geeignete Transformation. Mit diesen Definitionen folgen für Gruppen mit parabolischen Spitzen Analoga zu Peterssonschen Sätzen über parabolische Substitutionen und über das linke untere Element  $c$  einer

Substitution  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . — Die Differentialform  $ds^2 = \sum_{\nu=1}^n d\tau^{(\nu)} \overline{d\tau^{(\nu)}} y^{(\nu)-1}$  liefert in  $\mathfrak{Z}$  eine nichteuklidische Metrik, für die

$$\cos(d\tau_1, d\tau_2) = \frac{d\tau_1 \circ d\tau_2}{\sqrt{d\tau_1 \circ d\tau_1} \sqrt{d\tau_2 \circ d\tau_2}} \quad \text{mit} \quad d\tau_1 \circ d\tau_2 = \sum_{\nu=1}^n \frac{d\tau_1^{(\nu)} \overline{d\tau_2^{(\nu)}} + d\tau_2^{(\nu)} \overline{d\tau_1^{(\nu)}}}{2y^{(\nu)^2}}$$

ein bei Automorphismen von  $\mathfrak{Z}$  invariantes Winkelmaß bezeichnet. In dieser Metrik werden Existenz und Eindeutigkeit geodätischer Linien gezeigt, und mit ihrer Hilfe wird nach dem Weylschen Vorgehen ein Fundamentalbereich der Gruppe konstruiert. — Als Sonderfall ordnet sich die (engere) Hilbertsche Modulgruppe  $M$  eines total reellen algebraischen Zahlkörpers  $Z$  vom Absolutgrad  $n$  und der Idealklassenzahl  $h$  in die Theorie ein. Die  $n$  Komponenten einer Transformation  $S$  sind im gewöhnlichen Sinn die Konjugierten einer Substitution, deren Elemente im Bereich  $\mathfrak{o}$  der ganzen Zahlen von  $Z$  liegen. In diesem Fall läßt sich nach O. Blumenthal [Math. Ann. 56, 509—548 (1903)] ein Fundamentalbereich angeben, dessen Annäherung an den Rand von  $\mathfrak{Z}$  bekannt ist, er besitzt genau  $h$  nach  $M$  inäquivalente Randpunkte und ist von endlich vielen analytischen Mannigfaltigkeiten begrenzt. Ein entsprechender Fundamentalbereich wird für Untergruppen von endlichem Index aufgezeigt. — Da ein Satz von Blumenthal nicht in der a. a. O. angegebenen Allgemeinheit gültig ist, wird ein Zusatz gebracht, der die Ergebnisse der zweiten Blumenthalschen Arbeit sicherstellt [Math. Ann. 58, 497—527 (1904)].

E. Schulenberg (Berlin).

Maass, Hans: Zur Theorie der automorphen Funktionen von  $n$  Veränderlichen. Math. Ann. 117, 538—578 (1940).

Nachdem Verf. in der vorstehend besprochenen Arbeit die Theorie der Gruppen  $G$  hyperabelscher Transformationen entwickelt hat, führt er nun automorphe Formen reeller Dimension  $-r$  in  $n$  Veränderlichen zu diesen Gruppen ein:

$$\varphi(S\tau) = v(S) N(\gamma\tau + \delta)^r \varphi(\tau) \quad \text{für} \quad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G.$$

Er untersucht zunächst das Bildungsgesetz des Multiplikatorsystems  $v$  und das Verhalten der Formen in den parabolischen Spitzen. Für die Spitze  $A^{-1}\infty$  erhält man die „Potenzreihenentwicklung“

$$N(a_1\tau + a_2)^r \varphi(\tau) = \sum_{\mu \in \mathfrak{m}_A} a_A(\mu + \kappa_A) e^{2\pi i S(\mu + \kappa_A) A\tau},$$

wo  $S$  die Spur bedeutet,  $\mu = \{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(n)}\}$  in einem Modul  $\mathfrak{m}_A$  enthalten ist, der mit dem Modul  $\mathfrak{t}_A$  der Translationen aus  $AAA^{-1}$  zusammenhängt,  $\kappa_A = \{\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}, \dots, \kappa^{(n)}\} \bmod \mathfrak{m}_A$  eindeutig bestimmt und reell ist. Für reguläres  $\varphi(\tau)$  genügt die Summation über die  $\mu$  mit  $\mu + \kappa_A \geq 0$  (§ 1). Die Methoden sind komplizierter als für  $n=1$ , schließen sich jedoch an die dort von H. Petersson [Math. Ann. 103, 369 bis 436 (1930) und dies. Zbl. 19, 344] benutzten an. — Das Hauptergebnis der Arbeit ist der Satz, daß zwischen  $n+2$  ganzen automorphen Formen ganz rationaler Dimension zum Multiplikatorsystem  $v=1$  stets eine algebraische Gleichung bestimmter Eigenschaften besteht (§ 3). Daraus folgt für die automorphen Funktionen, zu deren Quo-

tientendarstellung durch automorphe Formen gleicher Dimension solche ganz rationaler Dimension ausreichen, daß sie rationale Funktionen von  $n + 1$  festen automorphen Funktionen sind, unter denen  $n$  bez. des Körpers  $Z$  der komplexen Zahlen linear unabhängige auftreten (§ 4). Als Hilfsmittel dienen wie für  $n = 1$  die verallgemeinerten Poincaré-Reihen:

$$G_{-r}(\tau; v; A, G; \mu + \kappa_A) = \sum \frac{g(M\tau, \mu + \kappa_A)}{v(M)N(m_1\tau + m_2)^r},$$

wo über alle  $M = AL$ ,  $L \in G$ , eines geeigneten Systems  $\mathfrak{S}(A, G)$  von Nebengruppen summiert wird;  $g(\tau, \mu + \kappa_A)$  ersetzt das für  $n = 1$  auftretende  $e^{2\pi i(\nu + \kappa)\tau}$ , es ist eine unendliche Summe im wesentlichen über die Ausdrücke  $e^{2\pi i S(\mu + \kappa_A)\tau}$  für assoziierte  $\mu + \kappa_A$ . Nach Konvergenzuntersuchungen, bei denen sich auch ergibt, daß für  $\mu + \kappa_A > 0$  das konstante Glied in der „Potenzreihenentwicklung“ verschwindet, daß also für  $\mu + \kappa_A > 0$  eine Spitzenform vorliegt, zeigt Verf. die Existenz einer nicht identisch verschwindenden ganzen automorphen Form der Dimension  $-rm$  zum Multiplikatorsystem  $v^m$  bei vorgegebenem  $v$  (zur Dimension  $-r$ ) und mindestens einem ganzzahligen  $m$ . (§ 2). Der erwähnte Hauptsatz folgt dann nach einzelnen Sätzen über identisch verschwindende automorphe Formen. Die Methoden der §§ 3 und 4 lehnen sich an C. Siegel (dies. Zbl. 21, 203) an. — Der Vollständigkeitssatz und die Charakterisierung der Poincaré-Reihen werden wiederum nach einem Verfahren von H. Petersson (dies. Zbl. 21, 25) entwickelt. Die Theorie der Metrisierung automorpher Formen, die für  $n = 1$  die Beweisführung so außerordentlich einfach und durchsichtig gestaltete, läßt sich auch hier sinngemäß übertragen, indem das Skalarprodukt der Formen  $f$  und  $\varphi$  definiert wird durch

$$(f, \varphi) = \int \dots \int f(\tau) \overline{\varphi(\tau)} N(y^{r-2} dx dy).$$

Die Kennzeichnungen geschehen auch hier durch Orthogonalitätsaussagen.

E. Schulenberg (Berlin).

**Hecke, E.:** Über die Darstellung der Determinante einer positiven quadratischen Form durch die Form. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 64—70 (1940).

Die Thetareihen  $F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n, Q) e^{2\pi i n \tau} = \sum_{n_1, \dots, n_r} e^{2\pi i Q(n_1, \dots, n_r) \tau}$  zu positiv definiten, ganzzahligen, geraden, quadratischen Formen  $Q(n_1, \dots, n_r)$  ( $f = 2k$ ,  $k$  ganz) mit der Determinante  $q$  [ungerade Primzahl  $\equiv (-1)^k \pmod{4}$ ] zeigen bezüglich der Modulsstitutionen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $c \equiv 0 \pmod{q}$  das Verhalten

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \chi(d)(c\tau + d)^k F(\tau). \quad \left(\chi(d) = \left(\frac{d}{q}\right)\right)$$

Jede Form  $F(\tau)$  mit dieser Eigenschaft heißt „vom reellen Nebentypus“ der Stufe  $q$  und der Dimension  $-k$ . Auf diese kann die Hecksche Theorie der Operatoren  $T_m^q$  (Math. Ann. 114, 316; dies. Zbl. 16, 355) angewendet werden. Das Peterssonsche Hauptachsentheorem (Math. Ann. 117, 39; dies. Zbl. 22, 129) besagt, daß die der

Reihe  $F(\tau)$  zugeordnete Dirichletreihe  $\varphi(s, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, Q) n^{-s}$  eine Linearkombination von kanonischen Eulerprodukten  $\psi(s)$  im Sinne der Heckschen Theorie ist. Daher gilt für  $a(n, Q)$  ein gewisses Multiplikationstheorem. Der Koeffizient  $c(n)$  eines Eulerprodukts  $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) n^{-s}$  tritt auch als Eigenwert des Operators  $T_n^q$  auf. Entspricht  $\psi(s)$  einer Spitzenform „vom reellen Nebentypus“, dann ist nach Petersson  $c(n) \sqrt{\chi(n)}$  reell, sobald  $(n, q) = 1$ . Verf. zeigt nun, daß die Eigenwerte  $\lambda$  von  $T_q^q$  Zahlen vom

Betrag  $q^{\frac{k-1}{2}}$  sind. Im allgemeinen sind sie weder reell noch rein imaginär. Die Eigenwerte  $\lambda$  stehen offenbar in enger Beziehung zur Anzahl  $a(q, Q)$  der Darstellungen von  $q$  durch  $Q$ . Der Operator  $K$  mit der Wirkung  $F(\tau) | K = \overline{F(-\bar{\tau})}$  ( $\bar{a}$  konjugiert komplex zu  $a$ ) wird als neues Hilfsmittel verwendet.

Maass (Heidelberg).



## Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

**Zwirner, Giuseppe:** Criteri d'unicità per gli integrali d'un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 11, 90—96 (1940).

Es handelt sich um einen Eindeigkeitssatz für das normale System (\*)  $y'_i = f_i(x; y_1, \dots, y_n)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), wo die  $f_i$  im Bereiche  $D: \bar{x} \leq x \leq b$ ,  $|y_i - \bar{y}_i| \leq \beta$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), bestimmte Funktionen sind. Verf. ersetzt die Beschränkungen

$$|f_i(x; y_1, \dots, y_n) - f_i(x; Y_1, \dots, Y_n)| (y_i - Y_i) \leq M(x) \omega \left( \sum_{k=1}^n |y_k - Y_k|^2 \right) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

von L. Giuliano (dies. Zbl. 23, 120) durch die Beschränkung

$$\sum_{i=1}^n \omega_i [y_1(x) - Y_1(x), \dots, y_n(x) - Y_n(x)] \{f_i[x; y_1(x), \dots, y_n(x)] - f_i[x; Y_1(x), \dots, Y_n(x)]\} \leq \varphi(x),$$

wo  $\varphi(x)$  eine für  $\bar{x} \leq x \leq b$  definierte, in  $(\bar{x} + h, b)$ , ( $\bar{x} < \bar{x} + h < b$ ) summierbare Funktion und die  $\omega_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$  für jeden Wert von  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (ausgenommen höchstens für  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ ) stetige Funktionen sind. Wenn außerdem zwischen  $\varphi(x)$

und  $\sum_{i=1}^n \omega_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$  unter den angegebenen Bedingungen eine Beschränkung der Form

$$\int_{a_1}^x \varphi(x) dx < \int_c^x \sum_{i=1}^n \omega_i(u_1, u_2, \dots, u_n) du_i \quad \text{gilt, wo } \bar{x} \leq \bar{x} + \delta < a_1 < a_2 \leq b$$

und  $c$  eine stetige rektifizierbare Kurve ist, beweist Verf., daß, falls  $y_1(x), \dots, y_n(x); Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  fast überall in  $(\bar{x}, b)$  zwei vom Punkt  $(\bar{x}; \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  ausgehende in  $\bar{x} \leq x \leq b$  stetige und für  $x > \bar{x}$  absolut stetige Lösungen des Systems (\*) sind, im ganzen Intervall  $(\bar{x}, b)$ , die Gleichungen  $y_1(x) = Y_1(x), \dots, y_n(x) = Y_n(x)$  gelten.

Giovanni Sansone (Firenze).

**Rellich, Franz:** Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Math. Ann. 117, 587—589 (1940).

Es wird der folgende Satz samt einigen diesbezüglichen Bemerkungen bewiesen: Wenn in der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  die rechte Seite eine für alle  $x, y$  konvergente Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten ist und wenn es zwei verschiedene ganze Lösungen  $u(x), v(x)$  der Differentialgleichung gibt, dann ist jede ganze Lösung  $w(x)$  von der Form  $w(x) = u(x) + (v(x) - u(x))c$ , wobei  $c$  eine geeignete Konstante bedeutet. Wenn  $f(x, y)$  in  $y$  nichtlinear ist, so hat die Differentialgleichung höchstens abzählbar viele ganze Lösungen  $y_1(x), y_2(x), \dots$ , und falls es deren unendlich viele gibt, so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \infty$  für jedes  $x$ .

O. Borůvka (Brünn).

**Zwirner, Giuseppe:** Problemi di valori ai limiti per equazioni differenziali ordinarie. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 10, 35—45 (1939).

$f_1(x, y')$  und  $f_2(x, y, y', y'')$  seien für  $a \leq x \leq b$  und beliebige Werte von  $y, y', y''$  stetige Funktionen, von denen die erste im  $y'$  nichtabnehmend und die zweite beschränkt ist; Verf. zeigt dann, daß das Randwertproblem  $y''' = f_1(x, y') + f_2(x, y, y', y'')$ ;  $y'(a) = \alpha$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(b) = \beta$  ( $a \leq x_0 \leq b$ ) immer mindestens eine Lösung besitzt, bei beliebigen Werten von  $\alpha, y_0$  und  $\beta$ . — Der Beweis führt über die Diskussion eines Systems zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten, in der der Verf. von dem Begriff der Ordnung eines Punktes bezüglich einer ebenen Kurve Gebrauch macht. — Schließlich verallgemeinert Verf. seinen Satz auf Gleichungen  $n$ -ter Ordnung. C. Miranda.

**Zwirner, Giuseppe:** Un criterio di esistenza per un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 10, 55—64 (1939).

Unabhängig von Cinquini (dies. Zbl. 21, 403) ergänzt Verf. einen eigenen Existenzsatz (dies. Zbl. 21, 128), der sich auf das Randwertproblem  $y'' = f(x, y, y')$ ,  $y(a) = \alpha$ ,  $y(b) = \beta$  bezieht, worin die Funktion  $f$  geeigneten Bedingungen in einem Gebiet der Form  $a \leq x \leq b$ ,  $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$ ,  $-\infty < y' < +\infty$  unterworfen ist.

G. Scorza-Drăgoni (Padova).

Schmidt, Adam: Konvergente und asymptotische Darstellungen für die Lösungen linearer Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen oder Exponentialpolynome mit komplexen Exponenten sind. Math. Z. 46, 481–558 (1940).

Bei Systemen linearer Differentialgleichungen  $w'_p(z) = \sum_{q=1}^n a_{pq}(z)w_q(z)$ ,  $p=1, 2, \dots, n$ , bzw. einer linearen homogenen Diffgl.  $n$ -ter Ordnung kommt man häufig zu Lösungen  $w_p(z)$ , die an der singulären Stelle  $z=0$  logarithmisch verzweigt sind. Uniformisierung durch den Ansatz  $z=e^s$  führt zu

$$(1) \quad \frac{d}{ds} y_p(s) = \sum_{q=1}^n b_{pq}(s) \cdot y_q(s) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^n}{ds^n} y(s) + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{d^p}{ds^p} y(s) \cdot b_p(s) = 0,$$

deren Koeffizienten  $b$  Dirichletsche Reihen mit ganzzahligen Exponenten sind. Verf. läßt bei seinen Untersuchungen als Koeffizienten Dirichletsche Reihen zu, deren Exponenten  $\lambda_\nu$  beliebige reelle Zahlen sind, die monoton wachsen und sich im Endlichen nicht häufen. Daneben werden auch solche Reihen mit komplexen Exponenten betrachtet:  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s}$ ;  $\lambda_0$  reell,  $\Re \lambda_\nu > \lambda_0$  für  $\nu > 0$  und  $\Re \lambda_\nu \geq \Re \lambda_{\nu-1}$ ; die Zahlen  $\Re \lambda_\nu$

häufen sich nicht im Endlichen. Unter diesen Voraussetzungen übertragen sich einige Ergebnisse über Dirichletsche Reihen mit reellen Exponenten direkt auf den Fall komplexer  $\lambda_\nu$ . Im ersten Kapitel wird der Satz von Sauvage über Bestimmtheitsstellen von Systemen linearer Diffgl. auf Systeme der Form (1) ausgedehnt. Bei Ver-

wendung des Matrizenkalküls hat (1) die Gestalt  $(1') \quad \frac{d}{ds} Y = YA$  (bei  $\frac{d}{ds} y_k = \sum_{i=1}^n y_i a_{ik}$ ,

$A = (a_{ik})$ ,  $Y = (y_{ik})$ ,  $y_{i1}, \dots, y_{in}$  linear unabhängige Lösungen).  $(1')$  hat unter gewissen Voraussetzungen eine in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  gleichmäßig konvergente Lösung der

Form  $Y = e^{A^* s} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu e^{\lambda_\nu^* s}$ ,  $A^*$  eine konstante Matrix. Die Struktur der Wurzeln von

$\Delta(A_0 - rE) = 0$  legt beim Beweise des Satzes eine Fallunterscheidung nahe. Für den Fall, daß keine Wurzeldifferenz sich als Linearkombination gewisser  $\lambda_\nu$  mit positiven ganzen Koeffizienten darstellen läßt, wird für eine passend transformierte Diffgl. ein Reihenansatz gemacht. Mit dem Konvergenznachweis dieser formal bestimmten Reihe ist dann ein Teil der Behauptung bewiesen. Der allgemeine Fall wird durch endlich viele Umformungen auf den bereits behandelten Fall zurückgeführt. Im zweiten Kapitel beschäftigt sich Verf. mit formalen Lösungen linearer, homogener Diffgl.  $n$ -ter Ordnung, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen mit endlich vielen negativen Exponentenpunkten sind. Aus der Annahme, daß  $(2) \quad \sum_{i=0}^n y^{(i)} a_i = 0$ ,  $a_i = e^{\eta_i s} (a_{i0} + \dots)$ ,

eine formale Lösung  $y = e^{\varrho s} (c_0 + \dots)$  besitzt, ergibt sich eine notwendige Bedingung, die sich auf die Größen  $\varrho$ ,  $a_{i0}$  und  $\eta_j$  bezieht;  $c_0 + \dots$  und  $a_{i0} + \dots$ ,  $c_0 \neq 0$ ,  $a_{i0} \neq 0$ , bedeuten Dirichletsche Reihen mit reellen, monoton gegen  $+\infty$  wachsenden Exponenten,  $\eta_j$  reelle Zahlen und  $\varrho$  beliebig komplex. Für eine gegebene Diffgl. der Form (2) wird gezeigt, daß durch den Ansatz  $y = y_1 e^{\int p ds}$ ,  $p$  ein passendes Exponentialpolynom, die Ausgangsdiffgl. in eine andere transformiert werden kann, welche die angedeuteten Bedingungen erfüllt. Durch Einführung einer Exponentenbewertung und Benützung des Newton-Diagrammes gelingt dem Verf. eine recht anschauliche und klare Darstellung dieses Reduktionsprozesses. Schließlich wird noch gezeigt, daß bei geeigneter Erweiterung des Begriffes der formalen Lösung die gefundene Bedingung auch hinreichend ist für die Existenz formaler Lösungen. Unter gewissen Voraussetzungen

besitzt  $(3) \quad y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)} a_{i+1} = 0$  eine formale Lösung  $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu s}$ . Mit Hilfe



einer geeigneten Vergleichsdiffgl. wird nachgewiesen, daß die formale Lösung asymptotische Darstellung einer Lösung von (3) für  $s \rightarrow -\infty$  ist. Bei Auflockerung der Voraussetzungen über die  $a_i(s)$  wird die Frage nach der asymptotischen Darstellbarkeit einer Lösung durch den bereits dargelegten Reduktionsprozeß auf den schon behandelten Fall zurückgeführt. Im Schlußkapitel wird die Diffgl. (4)  $y'' + ya = 0$  behandelt mit  $a = e^{2\omega s} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} e^{\lambda_{\nu} s}$ , wobei die  $\lambda_{\nu}$  gewisse komplexe Zahlen sein können. Die

in den vorangehenden Abschnitten benützten Reduktionen führen auch bei dem hier vorliegenden Falle komplexer Exponentenpunkte zum Ziel und gestatten, zusammen mit den Ergebnissen über asymptotische Lösungen, die asymptotische Darstellung eines Hauptsystems von Lösungen der Diffgl. (4) in einem Halbstreifen. *Wittich.*

**Kowalewski, Gerhard: Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen.** Deutsche Math. 5, 116—124 (1940).

Der Verf. benutzt Aufzeichnungen, die er in bei Lie gehörten Vorlesungen gemacht hat. Es werden die infinitesimalen Transformationen der  $G_8$  bestimmt, bei der die Differentialgleichung  $y'' + \varphi(x)y = 0$  invariant bleibt. Dabei stößt man auf die Differentialgleichung  $\beta''' + 4\varphi\beta' + 2\varphi'\beta = 0$ , von der sich herausstellt, daß sie die Fundamentallösungen  $\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_2^2$  besitzt. Es wird aber nicht erwähnt, daß sie die allgemeine infinitesimale Transformation der  $G_3$  definiert, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Geraden ähnlich ist. Die infinitesimalen Transformationen der  $G_8$  werden wirklich aufgestellt. Ebenso wird die lineare Gleichung 3. O. behandelt, nachdem sie durch einen Abelschen Kunstgriff auf die Form  $y''' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$  gebracht ist. Die Gruppe hat dann 7 oder 5 oder 4 Parameter. Der Verf. geht noch etwas näher auf die Differentialgleichungen  $y''' = 0$  und  $y^{(s+1)} = 0$  ( $s > 2$ ) und deren Gruppen ein. Schließlich werden die Gruppen der Ableitungen  $y', y'', \dots$  besprochen.

*Engel* (Gießen).

**Hukuhara, Masuo: Intégration formelle d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier.** Ann. Mat. pura appl., IV. s. 19, 35—44 (1940).

Verf. gibt die formale Lösung des Systems der nichtlinearen Differentialgleichungen an

$$x^{\sigma+1} \frac{dy_j}{dx} = \sum' \cdot x^{k_0} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

wo die Summe  $\sum'$  alle Glieder enthält, in welchen für  $n+1$  nichtnegative ganze Zahlen  $k_0, k_1, \dots, k_n$  die Bedingung  $k_1 + \dots + k_n > 0$  gilt. Der Punkt hinter  $\sum'$  bedeutet hier und in der nächsten Formel konstante Koeffizienten. Zur Lösung transformiert er dieses System durch passend gewählte doppelte Transformation in ein anderes System

$$\xi^{\nu+1} \frac{dv_j}{d\xi} = \sum \cdot \xi^{k_0} v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n},$$

das er kanonisch nennt und dem die Lösungen  $v_1 = 0, \dots, v_m = 0$  ( $m < n$ ) genügen; das System der übrigbleibenden  $n - m$  Differentialgleichungen gibt durch Quadraturen, indem man nacheinander die linearen Differentialgleichungen der ersten Ordnung integriert, die Lösungen

$$v_{m+1} = \varphi_{m+1}(\xi, C_{m+1}), v_{m+2} = \varphi_{m+2}(\xi, C_{m+1}, C_{m+2}), \dots, v_n = \varphi_n(\xi, C_{m+1}, \dots, C_n).$$

Wir erhalten auf diese Art die formale Lösung auch des gegebenen Systems, welche nach den Potenzen der  $n - m$  Funktionen  $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$  fortschreitet und  $n - m$  Integrationskonstanten  $C_{m+1}, \dots, C_n$  enthält; die Koeffizienten der Potenzen sind bestimmte Konstanten.

*Franz Rádl* (Prag).

**Malkin, I.: Sur un théorème d'existence de Poincaré-Liapounoff.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 307—311 (1940).

Vorgegeben sei das Differentialsystem

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^n (p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n + X_s) \frac{\partial z_i}{\partial x_s} = Z_i(t, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_k), \quad (*)$$

$i = 1, 2, \dots, k$

bei dem  $X_s$  und  $Z_i$  (von  $t$  abhängig) holomorphe Funktionen der Variablen  $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_k$  sind, deren Reihenentwicklungen gleichmäßig in  $t$  konvergieren ( $X_s$  enthält keine Glieder ersten Grades,  $Z_i$  enthält keine Glieder nullten Grades, und seine Glieder ersten Grades sind nicht von  $t$  abhängig). Die Koeffizienten der Entwicklungen wie auch die Koeffizienten  $p_{sk}$  sind stetige, beschränkte Funktionen von  $t$ . — Bei den Untersuchungen über die Stabilität muß man sich der Existenz von Lösungen  $z_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , des Systems (\*) versichern, die in  $x_1, \dots, x_n$  holomorph sind, deren Reihenentwicklungen gleichmäßig in  $t$  konvergieren und deren Koeffizienten stetige, beschränkte Funktionen von  $t$  sind. — Einige derartige Sätze sind von Liapounoff und von Poincaré aufgestellt worden, unter der Annahme, daß die Koeffizienten  $p_{sk}$  konstante oder periodische Funktionen seien. — Verf. stellt analoge, von diesen speziellen Hypothesen freie Sätze auf. Es wird nur die Existenz einer quadratischen Form  $V(t; x_1, \dots, x_n)$  der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  vorausgesetzt, deren Koeffizienten stetige, beschränkte Funktionen von  $t$  sind, so daß

$$V(t; x_1, \dots, x_n) \geq a^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) \quad (a \text{ reelle Konstante})$$

und außerdem

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} (p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n) \leq -b^2(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

oder  $\geq b^2(x_1^2 + \dots + x_n^2)$  gilt ( $b$  reelle Konstante).

L. Cesari (Pisa).

**Bebutoff, M.:** Sur la représentation des trajectoires d'un système dynamique sur un système de droites parallèles. Bull. Math. Univ. Moscou, Sér. internat. 2, Fasc. 3, 1—22 (1939).

Verf. beweist folgenden Satz: Damit eine stetige stationäre Strömung  $T_t P = P_t$  in einem metrischen, lokal kompakten und separierbaren Raum  $\Omega$  der Translationsströmung längs einer Menge paralleler Geraden des Hilbertschen Raumes homöomorph ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jede konvergente Punktfolge  $P^n$  in  $\Omega$  und für jede Zahlenfolge  $t_n \rightarrow \infty$  die Punktfolge  $P_{t_n}^n$  keine konvergente Teilfolge besitzt (die beiden Bedingungen des Verf. sind hier in einfacher Weise zusammengefaßt). Das Auftreten des Hilbertschen Raumes beruht auf der Einbettbarkeit von  $\Omega$  in ihn. Der erste Satz dieser Art rührt von V. Niemytzki (dies. Zbl. 13, 284) her, an dessen Beweisgedanken sich Verf. wesentlich anlehnt. Die Voraussetzungen über  $\Omega$  und  $T_t$  sind bei Niemytzki enger (differenzierbare Strömung in einem Teilraum eines Euklidischen Raumes  $R_k$ ). Dafür tritt in der Aussage an die Stelle des Hilbertschen ein Euklidischer Raum ( $R_{k+1}$ ).

E. Hopf (Leipzig).

**Schouten, J. A., und W. van der Kulk:** Beiträge zur Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen. 3. Beweis des Haupttheorems für den Fall, daß der Rang den höchsten Wert hat. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 453—462 (1940).

**Schouten, J. A., und W. van der Kulk:** Beiträge zur Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen. 4. Mitt.: Beweis des Haupttheorems für den Fall, daß der Rang einen beliebigen Wert hat. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 674—686 (1940).

On donne une nouvelle formulation du théorème principal (v. ce Zbl. 22, 343; 23, 40). Étant donné un système de  $m$  équations de Pfaff dans  $n$  variables  $(S)ds^h = \lambda_i^h dx^i = 0$  ( $h = 1, 2, \dots, m$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ) et en indiquant avec  $2\rho \leq n - m$  le rang (Engel) de  $(S)$ , c'est-à-dire le rang maximum des covariants bilinéaires

$$\Delta s^h = w_{\alpha\beta}^h ds^\alpha ds^\beta \pmod{ds^h}, \quad (\alpha, \beta = m+1, \dots, n)$$

le théorème affirme qu'on peut choisir dans  $(S)$   $m$  équations dont la classe est au plus  $2\rho + 1$ . Pour la démonstration on doit distinguer le cas où  $n - m$  est impair ou pair et le rang  $2\rho$  est maximum ou non.

G. Vranceanu (București).

**Sintsov, D. M.:** Recherches sur les variétés Pfaffiennes. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 62—81 u. engl. Zusammenfassung 81 (1940) [Russisch].



**Drach, Jules:** Sur un problème relatif aux formes différentielles linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 125—128 (1940).

Es handelt sich um das folgende Problem: In der Differentialform  $(\omega \equiv) R d\varphi - P dx - Q dy$ , wobei  $R, P, Q$  Polynome in  $\varphi$  mit Koeffizienten, die Funktionen von  $x, y$  sind, bedeuten, sind diese Koeffizienten so zu bestimmen, daß die Gleichung  $\omega = 0$  vollständig integrierbar wird. Der direkte, über die Identität  $R(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x) = P(\partial Q/\partial \varphi + \partial R/\partial y) - Q(\partial R/\partial x + \partial P/\partial \varphi)$  führende Weg zur Lösung dieses Problems scheint nicht gangbar. Die Methode des Verf. bezieht sich zuerst auf den Fall  $R d\varphi + \varphi dx - [1/A(x, y)] dy$  und geht von der Partialbruchzerlegung  $R d\varphi + \varphi dx - (1/A) dy = R \{ d\varphi - \sum_i [1/(\partial R/\partial \varphi_i)] [(1/A) dy - \varphi_i dx] : (\varphi - \varphi_i) \}$  aus, wobei  $R = (\varphi - \varphi_1) \dots (\varphi - \varphi_m)$  und  $\partial R/\partial \varphi_i = (\varphi_i - \varphi_1) \dots (\varphi_i - \varphi_m)$  gesetzt wird. Die Methode besteht in der Einführung von  $m$  unabhängig Veränderlichen  $\theta_1, \dots, \theta_m$  und in der Bestimmung von Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_m; \mu_1, \dots, \mu_m$  der  $\theta_i$ , so daß die Gleichung  $d\varphi = \sum_i \mu_i d\theta_i : (\varphi - \varphi_i)$  vollständig integrierbar wird. Diese Bedingung führt auf das System

$$\mu_i = \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i}; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left( \varphi_i \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \varphi_k \frac{\partial \omega}{\partial \theta_k} \right); \quad \frac{\partial \omega}{\partial \theta_k} = (\varphi_i - \varphi_k) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_k},$$

woraus man  $\omega$  oder die  $\varphi_i$  eliminieren kann. Andererseits besitzt das mit den Lösungen  $\varphi_i$  gebildete System  $[1/(\partial R/\partial \varphi_i)] [(1/A) dy - \varphi_i dx] = \mu_i d\theta_i$   $m$  integrierbare Verbindungen und führt auf die  $\theta_i, A$  also auch auf die  $\varphi_i, A$  als Funktionen von  $x, y$ . Der allgemeine Fall wird ähnlich behandelt. O. Borůvka (Brünn).

### **Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:**

**Galbraith, A. S., and S. E. Warschawski:** The convergence of expansions resulting from a self-adjoint boundary problem. Duke math. J. **6**, 318—340 (1940).

Es wird die Eigenwertaufgabe behandelt, die aus der Differentialgleichung

$$L(y) + \lambda r(x)y = 0 \quad \text{mit} \quad L(y) = [p(x)y']' - q(x)y$$

und selbstadjungierten Randbedingungen

$$(1) \quad \alpha_\nu y(a) + \beta_\nu y(b) + \gamma_\nu y'(a) + \delta_\nu y'(b) = 0 \quad (\nu = 1, 2)$$

besteht. Dabei sollen  $p$  stetig differenzierbar,  $q$  und  $r$  stetig, ferner  $p > 0$  und  $r > 0$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  und evtl. für eine gegebene Zahl  $n > 1$  die Funktionen  $p, q, r$  mit stetigen Ableitungen der Ordnungen  $n-1, n-2, n-2$  versehen sein. Die Eigenwerte seien  $\lambda_k$ , die Eigenfunktionen  $\varphi_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). In Verallgemeinerung von Fischer-Rieszschen Sätzen wird untersucht, wie es mit der Differenzierbarkeit von Reihen steht, die nach Eigenfunktionen fortschreiten. Die Hauptergebnisse sind: I. Konvergiert für gegebene Zahlen  $a_k$  die Reihe  $\sum_k \lambda_k^n a_k^2$ , so gibt es eine Funktion

$$(2) \quad f(x) = \sum_k a_k \varphi_k(x),$$

deren Fourierkoeffizienten die  $a_k$  sind:  $a_k = \int_a^b f r \varphi_k dx$ ; die Reihe (2) ist  $(n-1)$ -mal gliedweise differenzierbar, die entstehenden Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig,  $f^{(n-1)}(x)$  ist absolut stetig,  $\int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx$  existiert, und es ist

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b [f^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)]^2 dx = 0.$$

II. Es sei  $f(x)$  eine Funktion, für die  $f^{(n-1)}(x)$  existiert, absolut stetig ist und  $\int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx$  existiert. Ferner seien die  $G_\nu(x)$  durch

$$G_0(x) = f(x), \quad -r(x)G_s(x) = L(G_{s-1}) \quad \left( s = 1, 2, \dots, m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$$

definiert, und diese Funktionen mögen, wenn  $n > 1$  ist, für  $s \leq m-1$  die Randbedin-

gungen (1) erfüllen. Schließlich möge  $f$  im Falle  $n = 1$  diejenigen der Randbedingungen  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 0$ ,  $y(a) = ky(b)$  erfüllen, die in (1) enthalten sind, und für ungerades  $n > 1$  möge  $G_m$  diese Eigenschaft haben. Dann konvergiert  $\sum_k \lambda_k^n a_k^2$  für  $a_k = \int_a^b f r \varphi_k dx$ . Weiter ist  $f^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k^{(s)}(x)$  ( $s = 0, 1, \dots, n-1$ ), die Reihen konvergieren gleichmäßig und absolut, und es gilt (3). Kamke (Tübingen).

**Picone, Mauro:** Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti. Atti Accad. Sci. Torino 75, 413—426 (1940).

Sei  $D$  ein regulärer (zusammenhängender, abgeschlossener) Bereich des  $S_r$ ,  $X$  sein allgemeiner Punkt,  $dX$  das Raumelement und  $d\sigma$  das Flächenelement auf  $FD$  (Rand von  $D$ ). Wenn  $u$  eine in  $D$  definierte Funktion ist, welche dort der linearen partiellen Differentialgleichung  $E(u) = f$  genügt, und wenn  $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  orientierte Halbgeraden mit dem Ursprung im auf  $FD$  variablen Punkt  $X$  bezeichnen, die niemals die Randfläche berühren, so gilt für jede weitere Funktion  $v$  die Greensche Formel:

$$(1) \quad \int_D u E^*(v) dX = \int_D f v dX + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{FD} \frac{d^i u}{(dl_i)^i} E_i(v) d\sigma;$$

hier bedeuten  $E^*$  den adjungierten Operator von  $E$  und  $E_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) lineare partielle Differentialoperatoren der Ordnungen  $n-1-i$ . Wenn ein System  $[v_i]$  existiert derart, daß das System der  $E^*[v_i]$  abgeschlossen ist, so zeigt Gleichung (1), daß die Kenntnis der Formen  $U_i = d^i u / (dl_i)^i$  auf  $FD$  zur eindeutigen Bestimmung von  $u$  in  $D$  ausreicht, sofern man die Berechnung von  $u$  mit Hilfe eines Näherungsverfahrens im Mittel ausführen kann. — Diese Möglichkeit ist sicher immer dann gegeben, wenn der Operator  $E$  konstante Koeffizienten hat, weil man dann die Funktionen  $e^{-\sum \xi_k x_k}$  als System  $v_i$  einführen kann; in diesem Falle nimmt (1) die Gestalt an:

$$(2) \quad P(\xi_1, \dots, \xi_r) u'(\xi_1, \dots, \xi_r) = f'(\xi_1, \dots, \xi_r) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{FD} U_k E_k(e^{-\sum \xi_k x_k}) d\sigma,$$

wo  $u'$  und  $f'$  die  $r$ -fachen Laplace-Transformierten von  $u$  und  $f$  für den Integrationsbereich  $D$ , und  $P(\xi_1, \dots, \xi_r)$  ein Polynom bedeuten. — Natürlich wird man im allgemeinen nicht alle  $U_k$  willkürlich annehmen dürfen, da diese Funktionen voneinander nicht unabhängig sind; das erhellt im Falle konstanter Koeffizienten von  $E$  aus der Tatsache, daß, da  $u'$  eine ganze Funktion ist, die rechte Seite von (2) durch  $P$  teilbar sein muß. In diesem Zusammenhang stellt Verf. die Frage, ob diese Bedingung genügt, um alle die Beziehungen zu bestimmen, welche zwischen den  $U_k$  auftreten, und zeigt, daß man sie in einigen speziellen Fällen bejahend beantworten kann. Es ist bemerkenswert, daß man, wenn dies im allgemeinen wahr wäre, nach Kenntnis derjenigen  $U_k$ , die man willkürlich annehmen darf, die übrigen auf Grund der genannten Beziehung bestimmen könnte, worauf, da nun alle  $U_k$  bekannt sind, (2) ohne weiteres einen Ausdruck für  $u'$  liefert, von dem man mit Hilfe eines Inversionverfahrens leicht zur Funktion  $u$  gelangt. C. Miranda (Torino).

**Lowan, Arnold N.:** On some problems in the diffraction of heat. Philos. Mag., VII. s. 29, 93—99 (1940).

Per determinare la distribuzione di temperatura in un semispazio inizialmente a  $0^\circ$  e soggetto ad un flusso di calore attraverso un'assegnata apertura  $S$  del piano frontiera, viene considerato il problema di integrazione della

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] T(x, y, z; t) = 0 \quad (\text{per } z > 0)$$

colle condizioni

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, y, z; t) = 0; \quad - \left[ \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z; t) \right]_{z=0} = \begin{cases} -\frac{1}{K} Q(x, y; t) & (\text{in } S) \\ 0 & (\text{fuori di } S) \end{cases}.$$



Sono trattati quattro casi: A)  $S$  è una striscia; B)  $S$  è un cerchio; C)  $S$  è un arbitrario dominio limitato; D)  $S$  è un semipiano. I casi A), B), D) sono considerati in due dimensioni, facendo dipendere  $Q$  da una sola variabile spaziale. Riferendoci p. es. al caso C, la trasformata di Laplace

$$T^*(x, y, z; p) = \int_0^\infty e^{-pt} T(x, y, z; t) dt$$

della funzione incognita  $T$  risulta espressa dalla

$$T^*(x, y, z; p) = \frac{1}{4\pi^2 K} \iint_S d\alpha d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda} Q^*(\alpha, \beta; p) \cos[\xi(x - \alpha) + \eta(y - \beta)] d\xi d\eta,$$

avendo posto  $\lambda^2 = \frac{p}{k} + \xi^2 + \eta^2$ ; di qui, servendosi della nota formula

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}},$$

e del teorema di Borel, si perviene dopo qualche trasformazione alla

$$T(x, y, z; t) = \frac{1}{4\pi^{3/2} \sqrt{k} K} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{4k(t-\tau)}} d\tau \iint_S Q(\alpha, \beta; \tau) e^{-\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{4k(t-\tau)}} d\alpha d\beta.$$

Analogamente negli altri casi in cui la  $T^*$  viene ricavata ricorrendo ancora all'integrale di Fourier (casi A, D) oppure di Fourier-Bessel (caso B). Questo lavoro può essere riavvicinato a lavori di M. Picone (questo Zbl. 8, 209; 9, 398). *Aldo Ghizzetti.*

**Moisil, Gr. C.: Sur les petits mouvements des corps élastiques.** Disquisit. Math. et Phys., Bucaresti 1, 83—92 (1940).

Untersuchung der partiellen Differentialgleichung 4. O., der die Komponenten der kleinen Schwingungen eines elastischen Körpers genügen:

$$(*) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma^2 \Delta \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \tau^2 \Delta \right) \psi = 0$$

( $\Delta$  = Laplacescher Operator des Raumes  $\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ,  $\sigma = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ), mittels eines symbolischen Rechenprozesses, der eine Verallgemeinerung des für die Ebene von L. Sobrero (dies. Zbl. 8, 395) entwickelten Verfahrens ist. Es werden eine hyperkomplexe Einheit  $\theta$  durch die Gleichung  $(\theta^2 - \sigma^2)(\theta^2 - \tau^2) = 0$  bestimmt und damit die Ringe  $R(\theta)$  bzw.  $C(\theta)$  der hyperkomplexen Zahlen  $\xi = \alpha + \beta\theta + \gamma\theta^2 + \delta\theta^3$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  reelle bzw. komplexe gewöhnliche Zahlen) aufgebaut. In  $C(\theta)$  wird eine Zahl  $\omega$  durch  $\theta^2 + \omega^2 = 0$  bestimmt, mit der man auch den Ring  $R(\omega)$  aufbauen kann; in all diesen Ringen, die kommutativ sind und Nullteiler besitzen, besitzen Produkte wie  $(\xi^2 \pm \sigma^2 \eta^2)(\xi^2 \pm \tau^2 \eta^2)$ , wo  $\xi, \eta$  hyperkomplexe Zahlen sind, eine zweite Zerlegung in Faktoren. Zum Beispiel hat man in  $R(\omega)$

$$(\xi^2 + \sigma^2 \eta^2)(\xi^2 + \tau^2 \eta^2) = (\xi - \omega\eta)(\xi + \omega\eta)[\xi^2 + (\omega^2 + \sigma^2 + \tau^2)\eta^2].$$

Daher gibt es für die Differentialoperatoren symbolische Zerfällungen der Form

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \omega \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\omega^2 + \sigma^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right],$$

die dem Verf. die Verallgemeinerung der Resultate von Theodoresco (dies. Zbl. 3, 206) für die Flächenableitung und von Sobrero für  $\Delta^2 \varphi = 0$  auf part. Diffgl. 4. O. mit getrennten Charakteristiken erlauben. Setzt man  $D = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ , wo  $i, j, k$  Quaternioneneinheiten sind, so hat man  $D^2 = -\Delta$  und

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma^2 \Delta \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \tau^2 \Delta \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \omega D \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \omega D \right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\omega^2 + \sigma^2 + \tau^2) \Delta \right],$$

was die symbolische Zerlegung der Gleichung (\*) ist. Die Komponenten in  $R(\omega)$  der Quaternionen  $\psi = \psi_0 + i\psi_1 + j\psi_2 + k\psi_3$ , die stetige partielle Ableitungen 4. O. haben und das System  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega D\right)\psi = 0$  erfüllen, sind auch Lösungen der Gleichung (\*).

Verf. gibt mehrere Integralformeln und erhält eine Funktion (Hadamards Elementarlösung), die singular auf den zwei charakteristischen Kegeln der Gleichung (\*) ist.

N. Theodorescu (Bukarest).

Schermann, D. I.: *Problème mixte de la théorie du potentiel et de la théorie de l'élasticité pour un plan ayant un nombre fini de coupures rectilignes*. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **27**, 329—333 (1940).

In der komplexen  $z$ -Ebene seien längs der reellen Achse  $n$  Schnitte  $\gamma_{2k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) vorgegeben, deren obere bzw. untere Ränder mit  $\gamma_{2k-1}^{(1)}$  bzw.  $\gamma_{2k-1}^{(2)}$  bezeichnet seien. Gibt man auf den oberen Rändern die äußeren Kräfte und auf den unteren Rändern die Verrückungen vor, so stellt die Elastizitätstheorie die Aufgabe, zwei außerhalb der Schnitte holomorphe Funktionen  $\varphi(z)$  und  $\psi(z)$  zu bestimmen, die die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi + \overline{(z\varphi' + \psi)} &= f_1 && \text{auf } \gamma_{2k-1}^{(1)} \\ -\kappa\varphi + \overline{(z\varphi' + \psi)} &= f_2 && \text{auf } \gamma_{2k-1}^{(2)} \end{aligned}$$

erfüllen, in denen  $f_1$  und  $f_2$  bekannte Funktionen,  $\kappa$  die Elastizitätskonstante bedeuten.

M. Picone (Rom).

Brelot, M.: *Familles de Perron et problème de Dirichlet*. Acta Litt. Sci. Szeged **9**, 133—153 (1939).

Der Verf. entwickelt zuerst von neuem alte Theorien von Perron und Wiener. Dabei sei  $M$  eine Stelle einer offenen Menge  $\Omega$  mit dem Rande  $F$ ,  $u = u(M)$  eine subharmonische Funktion in  $\Omega$  und  $F_i$  die Menge aller  $u$  mit Randwerten  $\leq f$ , wo  $f$  eine auf  $F$  beschränkte Funktion ist. Die obere Enveloppe  $H_f^\Omega(M)$  (die Hypofunktion) ist dann harmonisch (Perron). Die ähnliche Folge  $F_s$  von in  $\Omega$  superharmonischen Funktionen mit Randwerten  $\geq f$  hat die harmonische untere Enveloppe  $\bar{H}_f^\Omega(M)$  (die Hyperfunktion). Wenn ihre Differenz (die harmonische Oszillation) identisch verschwindet (z. B. für alle stetigen  $f$ ) wird  $f$  lösbar (résolutive) genannt und  $\underline{H}_f^\Omega(M) = \bar{H}_f^\Omega(M) = H_f^\Omega(M)$  ist die Wiensche Funktion. Diese nimmt in allen regulären Randpunkten den Wert  $f$  an. Ein Randpunkt  $O$  ist dabei regulär, wenn eine positive und in  $O$  verschwindende harmonische Funktion im Durchschnitt von  $\Omega$  und einer Umgebung von  $O$  (dann auch im ganzen  $\Omega$ ) existiert. Diese Theorien werden weiter verallgemeinert. Die Funktion  $u(M)$  wird eine generalisierte subharmonische Funktion genannt, wenn 1)  $u$  in jedem Punkte  $M$  endlich oder  $= -\infty$  und nach oben halbstetig ist, und 2)  $u$  auf jeder abgeschlossenen Menge in  $\Omega$  summierbar und  $u(M)$  immer höchstens gleich dem Mittelwert von  $u$  auf einer Kreisscheibe in  $\Omega$  mit  $M$  als Mittelpunkt ist. Die Menge  $G_i$  aller solchen Funktionen  $u$  mit Randwerten  $\leq f$ , wo jetzt  $f$  eine beliebige Funktion auf  $F$  ist, hat (wenn sie nicht leer ist) eine obere Enveloppe  $T(M)$ , die entweder eine harmonische Funktion oder  $+\infty$  ist. Ähnlich wird die Menge  $G_s$  der analog generalisierten superharmonischen Funktionen in  $\Omega$  mit Randwerten  $\geq f$  erklärt. Weil nicht immer jede Funktion von  $G_s$  eine beliebige Funktion von  $G_i$  majorisiert, beschränkt sich der Verf. in jedem Teilbereich von  $\Omega$  für sich auf die Teilmenge  $G'_i$  von  $G_i$  mit der oberen Enveloppe  $T'(M)$ , die aus nach oben beschränkten Funktionen  $u$  besteht. Nun wird die Hypofunktion (analog die Hyperfunktion) als  $-\infty$  erklärt, wenn  $G'_i$  leer ist, sonst als  $T'(M)$ . Wenn die Hypo- und die Hyperfunktionen beide endlich und gleich sind, wird  $f$  résolutive genannt und der gemeinsame Wert ist wie oben die Wiensche Funktion. Für einen Bereich  $\Omega$  wird gezeigt, daß  $G'_i$  (wenn nicht leer) auch harmonische Funktionen mit derselben Enveloppe  $H_f^\Omega(M)$ , die von den Werten von  $f$  in den nichtregulären Randpunkten nicht abhängt, enthält. Im Beweis werden Resultate von Kellog-Evans, daß die Menge der nichtregulären Randpunkte eine Menge mit der Kapazität Null ist, und (Evans)



daß es auf jeder abgeschlossenen Menge mit der Kapazität Null eine Ladung gibt, deren Potential in jedem Punkte der Menge  $= +\infty$  ist, benutzt. Nach der Theorie von F. Riesz kann, wenigstens für beschränkte und stetige Funktionen  $f$ , die Wiener-sche Funktion in der Form  $H_f^\Omega(M) = \int f(P) d\mu^M$  dargestellt werden, wo  $\mu^M$  eine in bezug auf  $M$  harmonische additive Mengenfunktion auf  $F$  ist. Nun wird eine beliebige Funktion  $f$ , meßbar ( $\mu^M$ ), summierbar ( $\mu^M$ ) genannt, wenn bei der Zerlegung  $f = f^+ + f^-$  beide Integrale  $\int_F f^+ d\mu^M$  und  $\int_F f^- d\mu^M$  endlich sind, und summierbar im allgemeineren

Sinne, wenn wenigstens eines dieser Integrale endlich ist. Diese Eigenschaften sind von  $M$  unabhängig. Weiter beweist der Verf. die Existenz einer ( $\mu$ ) meßbaren und im allgemeineren Sinne ( $\mu$ ) summierbaren Funktion  $\psi \leq f$  auf  $F$ , für welche die Darstellung  $H_f^\Omega(M) = \int_F \psi d\mu^M$  gilt. Schließlich wird gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $f$  résolutive ist, lautet, daß  $f(\mu)$  meßbar und ( $\mu$ ) summierbar ist. Dann gilt  $H_f^\Omega(M) = \int_F f d\mu^M$ .

Gustav Hössjer (Göteborg).

**Brelot, M.:** Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, sousharmoniques ou holomorphes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 468—477 (1939).

Sätze von Beurling (Thèse, Upsala 1933; dies. Zbl. 8, 318) und Kunugui [Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 27—32 (1939); dies. Zbl. 21, 240] werden verallgemeinert. A. Es sei  $M$  eine Stelle einer offenen Menge  $\omega$  mit dem Rande  $F$ ,  $u(M)$  eine in  $\omega$  subhar-

monische Funktion,  $\vec{u}(P) = \limsup u(M)$  für  $M \rightarrow P$  auf  $F$  und  $\vec{u}(O) = \limsup \vec{u}(P)$  für  $P \neq O$  und  $P \rightarrow O$ . Wenn  $O$  ein regulärer Randpunkt und  $\vec{u}(O) < +\infty$  ist, zeigt

der Verf.  $\vec{u}(O) = \vec{u}(O)$ . A'. Wenn  $\omega$  beschränkt ist und aus den Bereichen  $\omega_i$  mit den Randmengen  $F_i$  besteht, betrachtet er eine solche Menge  $E$  auf  $F$ , die den regulären Randpunkt  $O$  enthält, daß der Durchschnitt  $E \cap F_i$  immer eine Menge mit dem inneren harmonischen Maße Null in bezug auf  $\omega_i$  ist. Es sei  $\lambda_u = \limsup \vec{u}(P)$  für  $P$  auf  $F - E$  und  $P \rightarrow O$ . Dann wird gezeigt:  $\lambda_u = \vec{u}(O)$  für  $\vec{u}(O) < +\infty$ . B. Es sei weiter  $\omega$  eine ebene Menge,  $O$  ein nichtisolierter und nichtregulärer Randpunkt und  $u$  eine solche nach oben beschränkte subharmonische Funktion, daß C. eine partielle Umgebung  $\sigma \cap \omega$  ( $\sigma$  Kreis mit  $O$  als Mittelpunkt) existiert, wo jede  $O$  umgebende Jordankurve für  $u(M)$  einen Fluß gibt, der entweder Null ist oder einen Modul  $> \eta$

( $\eta$  eine positive feste Zahl) besitzt. Dann wird abermals gezeigt:  $\vec{u}(O) = \vec{u}(O)$ . B'. Schließlich gilt mit den Bezeichnungen und sonstigen Bedingungen von A'.  $\lambda_u = \vec{u}(O)$  für  $\omega$  eben und beschränkt und einen irregulären Randpunkt  $O$ , wenn  $u$  eine nach oben beschränkte subharmonische Funktion ist, die C. genügt. Gustav Hössjer.

**Jacob, Calus:** Sur le problème de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications à hydrodynamique. J. Math. pures appl., IX. s. 18, 363—383 (1939).

Verf. betrachtet zunächst die schon oft untersuchte (z. B. Koebe, dies. Zbl. 14, 61 und Verf., dies. Zbl. 17, 352) ebene Strömung einer reibungsfreien, homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit in einem mehrfach zusammenhängenden Bereich  $\Omega$ , der auch den unendlichfernen Punkt enthalten kann.  $\Omega$  sei begrenzt von mehreren einfachen, geschlossenen und (abgesehen von einer endlichen Anzahl Punkte) stetig gekrümmten Kurven. Gegeben sind die Zirkulationen um jede dieser Kurven; ferner sei in einem inneren Punkt ein Wirbel und eine Doppelquelle angebracht; ist dieser Punkt der unendlichferne, so liegt die allgemeine Mehrdecker-Strömung vor. Die zu dieser Bewegung gehörige Stromfunktion wird in einfacher Weise aus der klassischen Green-schen Funktion und gewissen regulären Potentialfunktionen aufgebaut, die auf den Berandungen konstant sind und deren Konjugierte bezüglich je einer der Randkurven zyklische Perioden aufweisen. Alsdann wird mit Hilfe dieser Stromfunktion diejenige

in  $\Omega$  reguläre Potentialfunktion bestimmt, die, bis auf additive Konstante, auf der Berandung vorgegebene Werte annimmt und deren Konjugierte gegebene Periodizitäten bezüglich der Randkurven besitzt. — Als Beispiel dient u. a. die bekannte Strömung um zwei Kreise. — Die Betrachtungen werden schließlich auf ein gemischtes Randwertproblem erweitert, bei dem auf einer Anzahl von Randkurven die Randwerte der Potentialfunktion selbst, auf den übrigen die Randwerte der Konjugierten gegeben sind.

Maruhn (Berlin).

Wavre, R.: Sur l'identification des potentiels. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 87—94 (1940).

Die Ausführungen geben Beweise für Behauptungen des Verf. in einer früheren Note (L'Enseignement math. 36, 392) betreffend die Frage, wann verschiedene Massenverteilungen dasselbe Potential erzeugen. Zuerst werden auf Grund der Theorie von Cauchy-Kowalewska die Funktionen (fonctions de passage) bestimmt, um welche sich ein Potential beim Eindringen und Durchsetzen von mit Masse belegten Körpern bzw. Flächen ändert. Für ein gegebenes System von erzeugenden Körpern und Flächen sind dann die zugehörigen fonctions de passage bestimmbar. Die wesentliche notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein solches Potential identisch verschwindet, ist, daß für alle möglichen Umläufe die Summe der eingehenden Durchgangsfunktionen verschwindet. Es wird noch eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, wann eine Funktion Potential gegebener erzeugender Flächen und Körper ist. Auf Resultate, die aus diesen Sätzen entspringen, wird hingewiesen. Tautz (Breslau).

Rice, S. O.: The electric field produced by a point-charge located outside a dielectric wedge. Philos. Mag., VII. s. 29, 36—46 (1940).

Verf. gewinnt für das elektrost. Potential einer Punktmasse  $q$  bei Anwesenheit eines unendlichen Dielektrikums, das von 2 sich schneidenden Ebenen begrenzt wird, den Ausdruck

$$V_a = V_0 + iq/\pi \sqrt{\varrho \varrho_0} \int_{-i\infty}^{i\infty} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}(s) f(\lambda, \theta) d\lambda, \quad V_i = iq/\pi \sqrt{\varrho \varrho_0} \int_{-i\infty}^{i\infty} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}(s) g(\lambda, \theta) d\lambda,$$

$s = (\varrho^2 + \varrho_0^2 + z^2)/2\varrho\varrho_0$  ( $\varrho, \varrho_0$  sind die Abstände des Aufpunktes bzw. des Massenpunktes ( $z = 0$ ) von der Schnittkante der Ebenen).  $V_0$  ist der Wert des ungestörten Potentials,  $V_a$  der Wert in der Luft.  $f, g$  sind rationale Kombinationen trigonometrischer Funktionen. Die  $Q_{\lambda-\frac{1}{2}}$  sind Legendresche Kugelfunktionen zweiter Art, die Integrale Hauptwerte. Durch Integration längs einer Geraden durch den Massenpunkt parallel zur Schnittkante gewinnt Verf. noch das analoge logarithmische Potential.

Tautz (Breslau).

### Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Collatz, L.: Schrittweise Näherungen bei Integralgleichungen und Eigenwertschranken. Math. Z. 46, 692—708 (1940).

Die Arbeit stellt eine methodische Ausnutzung der beim Existenzbeweise der Eigenwerte für die symmetrische Integralgleichung

$$(1) \quad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

auf dem Wege über die Schwarzschen Konstanten verwendeten Gedanken zur Eigenwertabschätzung dar. Es seien bei einem positiv definiten Kern die  $\lambda_i > 0$  nach aufsteigender Größe geordnet,  $\varphi_i$  die zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen; bildet man, von einem willkürlichen quadratisch-integrierbaren  $F_0(s)$  ausgehend, die Folge

$$F_n(s) = \int_a^b K(s, t) F_{n-1}(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und damit die Schwarzschen Konstanten

$$a_n = \int_a^b F_m(s) F_{n-m}(s) ds \quad (m \leq n); \quad \mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n},$$



so sind die  $\mu_n$  eine monoton abnehmende, gegen  $\lambda_1$  konvergente Folge. Geht man von der Funktion

$$F_0^* = F_0 - \sum_{i=1}^r \varphi_i \int_a^b F_0(s) \varphi_i(s) ds$$

aus und bildet analog die Größen  $\alpha_n^*$ ,  $\mu_n^*$ , so sind alle  $\mu_n^*$  obere Schranken für  $\lambda_{r+1}$ , falls  $\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}$  verschieden sind. Hieraus gewinnt man mit  $r=1$ , falls  $\lambda_1 < \lambda_2$  ist und  $n$  so groß gewählt wird, daß  $\mu_{n+1} < \lambda_2$  ist, für  $\lambda_1$  den Einschließungssatz:

$$(2) \quad 0 \leq \mu_{n+1} - \lambda_1 \leq (\mu_n - \mu_{n+1}) \left/ \left( \frac{\lambda_2}{\mu_{n+1}} - 1 \right) \right.$$

Unter Anwendung des Entwicklungssatzes auf

$$F_1(s) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \varphi_i(s); \quad c_i = \int_a^b F_1(s) \varphi_i(s) ds \quad (i = r, \dots, \infty)$$

läßt sich die Methode zur Einschließung höherer Eigenwerte verwenden, falls  $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n+1}$  voneinander verschieden sind. Man bildet die Folgen:

$$c_{i, l+1}^2 = \left(1 - \frac{\lambda_{r+l}}{\lambda_i}\right) c_{i, l}^2, \quad c_{i, 0}^2 = c_i^2, \quad (i = r, r+1, \dots; l = 0, 1, \dots)$$

$$\mu_n^{(l)} = \sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i, l}^2}{\lambda_i^{n-3}} : \sum_{i=r+l}^{\infty} \frac{c_{i, l}^2}{\lambda_i^{n-2}};$$

die letzte ist monoton abnehmend und, falls  $c_{r+l} \neq 0$ , gegen  $\lambda_{r+l}$  konvergent, so daß von einem gewissen  $n$  ab  $\mu_{n+1}^{(l)} < \lambda_{r+l+1}$  wird; dann gilt

$$(3) \quad 0 \leq \mu_{n+1}^{(l)} - \lambda_{r+l} \leq (\mu_n^{(l)} - \mu_{n+1}^{(l)}) \left( \frac{\lambda_{r+l+1}}{\mu_{n+1}^{(l)}} - 1 \right),$$

was unter Heranziehung von (2) insbesondere zu einer Einschließung von  $\lambda_2$  führt. — Der Fall des nicht positiv definiten Kerns wird durch Übergang zum iterierten Kern auf den eben behandelten zurückgeführt. Ein Zahlenbeispiel:  $K(s, t) = |s - t|$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  zeigt die außerordentliche Güte der erhaltenen Einschließungen. — Am Schluß verallgemeinert Verf. den Templeschen Einschließungssatz. Es sei  $F_1(s) \neq 0$  und in  $a \dots b$   $G(s) = F_0(s) : F_1(s)$  zwischen den endlichen Grenzen  $G_u$  und  $G_0$  gelegen; wechselt ferner  $\varphi_k(s) F_1(s)$  in  $a \dots b$  nicht das Zeichen, so ist  $G_u \leq \lambda_k \leq G_0$ .

Harald Geppert (Berlin).

**Miranda, Carlo:** Su alcuni sviluppi in serie procedenti per funzioni non necessariamente ortogonali. (Istit. p. le Applicaz. d. Calcolo d. Consiglio Naz. d. Ricerche, Roma.) Acta Pontif. Acad. Sci. 3, 1—4 (1939).

Der Kern der Integralgleichung

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, y; \lambda) \varphi(y) dy \quad (1)$$

sei reell, stetig, in  $x, y$  symmetrisch und im  $\lambda$  analytisch, etwa nur mit Polen als Singularitäten behaftet. Ist die Lösung  $\varphi(x, \lambda)$  von (1) in  $\lambda$  meromorph und besitzt sie nur reelle Pole  $\lambda_n$  erster Ordnung, die Regularitätsstellen von  $G(x, y; \lambda)$  sind, so sind die  $\lambda_n$  Eigenwerte der zu (1) gehörigen homogenen Integralgleichung;  $\varphi_n(x)$  sei das zugehörige normierte System der Eigenfunktionen. Ist dann für  $(\varphi(x, \lambda) - f(x))/\lambda$  eine Teilbruchentwicklung Cauchyschen Stiles möglich, so lautet die Auflösungsformel für (1):

$$\varphi(x, \lambda) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_a^b f(y) \varphi_n(y) dy \left/ (\lambda_n - \lambda) \left( 1 + \lambda_n^2 \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t; \lambda_n) \varphi_n(s) \varphi_n(t) ds dt \right) \right., \quad (2)$$

und daraus folgt ein dem Hilbert-Schmidtschen analoger Entwicklungssatz für quellenmäßige Funktionen:

$$\int_a^b G(x, y; \lambda) f(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{\int_a^b \int_a^b (\lambda_n G(s, t; \lambda_n) - \lambda G(s, t; \lambda)) f(s) \varphi_n(t) ds dt}{(\lambda_n - \lambda) \left( 1 + \lambda_n^2 \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t; \lambda_n) \varphi_n(s) \varphi_n(t) ds dt \right)}, \quad (3)$$

Diese Sätze gelten insbesondere für die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **19**, 412) behandelten Kerne der Form  $G(x, y; \lambda) = K(x, y) + \frac{\lambda}{\lambda + a} X(x)X(y)$ . Beweise fehlen. Harald Geppert (Berlin).

**Miller, F. H.:** A note on Heaviside's expansion theorem. J. appl. Physics **11**, 343—346 (1940).

**Natanson, I. P.:** Sur un procédé de sommation des intégrales de Fourier. Rec. math. Moscou, N. s. **7**, 313—319 u. franz. Zusammenfassung 319—320 (1940) [Russisch].

L'aut. donne une méthode pour la sommation des intégrales de Fourier analogue aux méthodes de S. Bernstein [C. R. Acad. Sci., Paris **191** (1930)] et Rogosinski (Fouriersche Reihen. Berlin 1930) pour les séries de Fourier. Soit  $f(t)$  une fonction intégrable  $L$  dans  $(-\infty, \infty)$  et posons

$$S_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x) dt, \quad B_\lambda(x) = \frac{1}{2} \left[ S_\lambda(x) + S_\lambda\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right].$$

Il démontre les théorèmes: 1. Dans tous les points  $x$  où  $\int_0^\lambda |f(x+t) - f(x)| dt = o(h)$  on a  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda(x) = f(x)$ . 2. Si  $f(t) \in Lip \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), alors  $B_\lambda(x) - f(x) = O(\lambda^{-\alpha})$ . 3. Si  $f(t) \in Lip 1$ , alors  $B_\lambda(x) - f(x) = O(\log \lambda / \lambda)$ . 4. Si dans le point  $x_0$  existent  $f'(x_0 + 0)$  et  $f'(x_0 - 0)$  alors  $B_\lambda(x_0) - f(x_0) = o(\log \lambda / \lambda)$ . N. Obrechkojff (Sofia).

**Kawata, Tatsuo:** Non-vanishing of functions and related problems. Tôhoku Math. J. **46**, 328—339 (1940).

Let  $G(u)$  be a real or purely imaginary function belonging to  $L_1(-\infty, \infty)$  and  $L_2(-\infty, \infty)$  such that  $G(u) = 0$  for all  $u > 0$  except  $(\mu_n - \frac{1}{2}, \mu_n + \frac{1}{2})$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) where  $\beta \geq \mu_{n+1}/\mu_n \geq \alpha > 1$  and  $0 < A < G(u)/G(v) < B$  for  $\mu_n - \frac{1}{2} < u, v < \mu_n + \frac{1}{2}$ , where  $A, B, \alpha, \beta$  are constants independent of  $n$ . Let  $f(x)$  be Fourier transform of  $G(u)$  and  $g(z) = \bar{g}(x + iy)$  be analytic in  $c < x < d$ ,  $0 < y < r$  and continuous in  $c < x < d$ ,  $0 \leq y < r$ . The author proves that if  $f(x) = g(x)$  in some interval of  $(c, d)$ , then  $f(x) = g(x)$  in  $(c, d)$ , and gives some interesting applications. Izumi.

**Kober, H.:** On Dirichlet's singular integral. Quart. J. Math., Oxford Ser. **11**, 66—80 (1940).

Let  $f(t) \in L_p(-\infty, \infty)$  ( $1 \leq p$ ) and  $D_\alpha f = f(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{\sin \alpha(t-s)}{t-s} dt$ ,  $\alpha$  being finite and positive. The author discusses  $f(s, \alpha)$  as a function both of a real and of a complex variable. For the case of a real variable, he proves that (1) when  $p = 1$ , then  $D_\alpha f \in L_r$  for all  $r > 1$ , (2) when  $1 < p < \infty$ , then  $D_\alpha f \in L_q$  for all  $q \geq p$  and  $|D_\alpha f|_p \leq C_p \cdot |f|_p$ , where  $|f|_p = \left( \int_{-\infty}^\infty |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$  and  $C_p$  depends on  $p$  only, and  $|D_\alpha f - f|_p \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), (3) let  $A_p$  be the best possible value of  $C_p$  in (2), then  $A_p = A_{p'}$  ( $p' = p/(p-1)$ ), and  $A_p$  is a monotone non-decreasing and continuous function of  $p$  ( $p \geq 2$ ), and (4) when  $1 \leq p < \infty$ , then  $D_\alpha(D_\beta f) = D_\beta(D_\alpha f) = D_\gamma f$  ( $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ ). For the case of a complex variable, he proves that if  $f(z)$  is an integral function such that (1)  $\alpha_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{|z| = r} (1/r) \log |f(z)|$  is finite and (2)  $f(z)/(1 + |z|)$  belongs to  $L_p$  along an arbitrary straight line in the complex plane, making an angle  $\Phi$  with the positive real axis, then  $\frac{1}{\pi} \int_C f(z) \frac{\sin \beta(s-z)}{s-z} dz = f(s)$  for  $\arg \beta = -\Phi$  and  $\beta e^{i\Phi} \geq \alpha_0$ . This paper contains further connected theorems. Izumi.

### Funktionentheorie:

**Pompeiu, D.:** De la définition du pôle en théorie des fonctions. Disquisit. Math. et Phys., București **1**, 57—59 (1940).

Der Verf. diskutiert verschiedene Möglichkeiten für die Definition eines Poles. Saxer.



Kharadse, A.: Eine Anwendung des Graceschen Faltungssatzes. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 175—180 u. deutsch. Zusammenfassung 179—180 (1940) [Russisch].

En appliquant le théorème de Grace [Proc. Cambridge Philos. Soc. 11 (1900 à 1902)] l'aut. démontre le théorème suivant: soit  $f(z)$  un polynôme de degré  $n$  qui satisfait aux conditions  $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \dots = f(\alpha_k)$ ,  $f'(\alpha_1) + f'(\alpha_2) + \dots + f'(\alpha_k) = 0$ , où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sont les racines de l'équation  $x^k = 1$ . Alors  $f'''(z)$  a au moins un zéro dans chaque domaine circulaire qui contient toutes les racines de l'équation

$n \sum_{s=1}^k (\alpha_s - z)^{n-1} - \sum_{s=1}^k \alpha_s^{-1} (\alpha_s - z)^n = 0$ . Dans le cas  $n = 2k + 1$  le polynôme  $f'''(z)$  s'annule dans le cercle  $|z| \leq \sqrt[k]{(k^2 - 1) / \binom{2k-2}{k}} (4k^2 - 1)$  et dans le cas  $n = 2k + 2$

il s'annule dans  $|z| \leq \sqrt[k]{(k^2 - 1) / \binom{2k-1}{k+1}} (2k + 1)$ . N. Obrechhoff (Sofia).

Meyer-König, Werner: Abelsche Sätze für Dirichletsche Reihen. Math. Z. 46, 571—590 (1940).

Die Potenzreihe (1)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  habe den Konvergenzradius 1, und es sei die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit den Teilsummen  $s_n = \sum_{v=0}^n a_v$  konvergent zur Summe  $s$ . Dann besagt die Stolzische Verallgemeinerung des Abelschen Stetigkeitssatzes, daß (2)  $f(z) \rightarrow s$  strebt, wenn  $z$  „im Winkelraum“ bleibend gegen 1 rückt. Dies folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von (1) in jeder „Winkelraumumgebung“ von  $z = 1$ . Die Beziehung (2) gilt nicht mehr allgemein, wenn  $z$  in beliebiger Weise aus dem Innern des Einheitskreises gegen 1 rückt. Unter zusätzlichen Voraussetzungen über  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

lassen sich jedoch Aussagen machen, die über die Stolzische hinausreichen. So weiß man, daß die Reihe (1) im Innern und auf dem Rand jedes den Einheitskreis in  $z = 1$  von innen berührenden Kreises gleichmäßig konvergiert, falls (I) die Beziehung (3)  $\sqrt[n]{n}(s_n - s) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  besteht [K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II, 32, Aufgabe 6 (1928)] oder falls (II) für ein  $\vartheta > 0$  die Beziehung (4)  $\sum_{x \leq n \leq x^{1+\vartheta}} |a_n| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$  besteht [F. Lössch, Math. Z. 37, 85—89 (1933); dies.

Zbl. 6, 211]. — Verf. gibt zu diesen Sätzen einige bemerkenswerte Ergänzungen: a) In (I) und (II) weist der Rand des Bereichs, in dem die gleichmäßige Konvergenz von (1) behauptet wird, mit dem Einheitskreis in  $z = 1$  eine Berührung 1. Ordnung auf. Statt dessen werden nun Bereiche betrachtet, deren Rand den Einheitskreis in  $z = 1$  von irgendeiner Ordnung berührt. Ist  $\mathfrak{B}(\alpha, c)$  für  $c > 0$  und  $0 < \alpha \leq 1$  der

durch  $|\varphi| \leq \text{Min}\left(\frac{\pi}{2}, c^{-\alpha}\right)$ ,  $0 \leq r \leq 1 - c|\varphi|^{\frac{1}{\alpha}}$  charakterisierte Bereich, so wird ent-

sprechend (I) und (II) gezeigt: (Ia) Ersetzt man für ein festes  $\alpha$  aus  $(0, 1)$  die Bedingung (3) durch (5)  $n^{1-\alpha}(s_n - s) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , so ist (1) für beliebiges  $c > 0$  in  $\mathfrak{B}(\alpha, c)$  gleichmäßig konvergent. (IIa) Besteht (4), so ist (1) für beliebiges  $\alpha$  aus  $(0, 1)$  und jedes  $c > 0$  in  $\mathfrak{B}(\alpha, c)$  gleichmäßig konvergent. Während also im Falle (Ia) die Voraussetzung von der Berührungsordnung abhängt, trifft dies im Falle (IIa) nicht zu. — b) Die Sätze (Ia) und (IIa) sind je in einer gewissen Richtung „bestmögliche“: (Ib) Ist (5) für eine feste Zahl  $\alpha$  aus  $(0, 1)$  erfüllt, so läßt sich in keinem Bereich  $\mathfrak{U}$ , dessen Rand sich dem Einheitskreis in  $z = 1$  stärker anschmiegt als jeder Bereich  $\mathfrak{B}(\alpha, c)$  mit noch so kleinem  $c > 0$ , allgemein gleichmäßige Konvergenz von (1) behaupten. (IIb) Es sei  $\tau_x \geq 0$ , und es strebe (beliebig langsam)  $\tau_x \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ . Besteht dann die Beziehung  $\sum_{x \leq n \leq x^{1+\tau_x}} |a_n| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ , so braucht die Behauptung

des Satzes (IIa) nicht zu gelten. — c) Die Berührung der bisher in Betracht gezogenen



Bereiche  $\mathfrak{B}$  mit dem Einheitskreis in  $z = 1$  ist vom Potenzcharakter. Im Falle des Satzes (II) zieht Verf. weiterhin noch Bereiche in Betracht, deren Berührung mit dem Einheitskreis nicht vom Potenzcharakter ist. Die Bedingung (4) erfährt dann eine Modifikation, und es wird der Bereich der in Frage kommenden Bedingungen vom Typus (4) abgegrenzt. — Die ganzen Ergebnisse werden sogleich allgemein für Dirichlet-sche Reihen gewonnen, ein Teil wird noch auf Laplace-Integrale übertragen. *F. Lösch.*

**Montel, Paul:** Sur la distance des points en lesquels une fonction analytique prend des valeurs données. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 31—39 (1940).

Es seien die Zahlen  $a, b, \alpha (> 1)$  und  $R (> 0)$  gegeben und  $b_1, b_2, \dots$  eine positive Folge mit  $\lim \sqrt[n]{b_n} \geq 1$ . Es wird für diejenigen im Inneren des Einheitskreises regulären

Funktionen  $f(z) = a + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ , für welche  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|^\alpha \leq R^\alpha$  ist, ein  $\delta$  gefunden,

so daß  $f(z) \neq b$  für  $|z| < \delta$ . Weiter wird eine obere Schranke von  $|f'(z)|$  für  $|z| \leq \varrho < 1$  ermittelt. Durch Angabe von Extremalfunktionen wird gezeigt, daß die beiden Grenzen genau sind. *G. af Hällström (Åbo).*

**Anastasiadis, Jean:** Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières et méromorphes d'ordre fini. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 204—206 (1940).

In Verallgemeinerung früherer Resultate von Calugareanu und Ghermanescu behauptet der Verf. den folgenden Satz: Wenn eine ganze Funktion

$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

von der Ordnung  $p$  einen Picardschen Ausnahmewert besitzt, so ist derselbe eine rationale Funktion der  $2p + 1$  ersten Koeffizienten  $c_0, c_1, \dots, c_{2p}$ . Ebenso formuliert er einen entsprechenden Satz für meromorphe Funktionen endlicher Ordnung. *Saxer.*

**Kamenetzky, I. M.:** Sur l'interpolation au moyen des dérivées et les procédés d'interpolation correspondants. II. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 217—219 (1940).

Vgl. zunächst dies. Zbl. 22, 215 für das Referat über I. — Sei  $j(i)$  das erste Element einer gradierten Folge  $n_0 \leq n_1 \leq \dots$  größer als  $i$ , so bilden die durch die Forderungen

$$p_i^{(n_i)}(x_i) = 1, \quad p_i^{(n_k)}(x_k) = 0 \quad \text{für } k \neq i \text{ aus } 0, 1, \dots, j(i) - 1$$

eindeutig bestimmten Polynome eine vollständige Folge (basic set bei J. M. Whittaker)

und gestatten, jedes Polynom vom Grade  $m$  darzustellen als  $P_m(x) = \sum_{i=0}^{j(m)-1} P_m^{(n_i)}(x_i) p_i(x)$ .

— Der Hauptteil der Note II betrifft die Darstellbarkeit von ganzen Transzendenten genügend schwachen Wachstums, und die Konvergenz der Darstellungsreihen vom Bau

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g^{(n_i)}(x_i) p_i(x),$$

wenn die Interpolationsstellen  $x_i$  eine periodische Folge (für festes  $m$ :  $x_{i+m} = x_i$ ,  $i \leq m - 1$ ) oder eine „asymptotisch-periodische“ Folge bilden (für  $\mu = 0, 1, \dots, m - 1$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{\mu + \nu m} = \xi_\mu$ ) und dabei die  $n_i$  eine gradierte Folge mit  $n_{i+m} = n_i + m$  sind.

Es wird die Wachstumsordnung  $\leq 1$ , der Typus  $\leq l$  vorausgesetzt;  $l$  ergibt sich als Betrag der kleinsten Wurzel ( $\neq 0$ ) einer Determinante  $\Delta(\lambda) = |\omega^{n_i} e^{\omega^{i-1} \lambda \xi_i}|$ ,  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ , und ist im periodischen Fall genau. — Sätze von Gontscharoff, Poritzky, Schoenberg werden umfaßt. *Ullrich (Gießen).*

**Helmer, Olaf:** Divisibility properties of integral functions. Duke math. J. 6, 345—356 (1940).

Der Verf. konstruiert eine Teilbarkeitstheorie ganzer Funktionen, wobei die Koeffizienten ihrer sie darstellenden Reihen

$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

gewissen Körpern reeller oder komplexer Zahlen angehören. Nach Definition der Begriffe „Einheit, Teiler, Ideal, Hauptideal“ beweist er einige Sätze sowohl für allgemeine ganze Funktionen als auch speziell für ganze Funktionen endlicher Ordnung.



Z. B. zeigt er, daß jede Funktion eines Körpers im wesentlichen auf genau eine Weise als Produkt irreduktibler Funktionen dieses Körpers dargestellt werden kann.

Saxer (Küsnacht).

**Joh, Kenzo: Theorems on „schlicht“ functions. 4.** Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 329—343 (1940).

Verf. betrachtet einen Satzkomplex folgender Art. Gegeben sind Funktionen  $F(z)$ , regulär und  $\neq 1$  für  $|z| < R$  und mit  $F(0) = 0$ . Der Kreis  $|z| < R$  werde mittels  $w = F(z)$  schlicht auf ein Gebiet  $\mathfrak{G}$  der  $w$ -Ebene abgebildet, und es sei  $\alpha$  das Lebesguesche Maß der Punktmenge auf  $|z| = R$ , für die bei radialer Annäherung  $\lim_{|z| \rightarrow R} |F(z)| \geq R^k$ .

Bei gewissen Voraussetzungen über das Gebiet  $\mathfrak{G}$  und passender Wahl der Konstante  $k$  besagen dann die Sätze, daß  $\alpha < 8$  ist, aber andererseits zu jedem  $\varepsilon (> 0)$  ein  $F(z)$  und ein  $R$  gefunden werden können mit  $\alpha > 8 - \varepsilon$ . Unkelbach hat (dies. Zbl. 21, 143) mit Hilfe von Löwners Lemma die Aussage in folgenden Fällen bestätigt: 1)  $\mathfrak{G}$  konvex und  $k = 1$ , 2)  $\mathfrak{G}$  liegt in  $\Re w < 1$  und  $k = 1$ , 3)  $\mathfrak{G}$  ist sternförmig in bezug auf  $w = 0$  und  $k = 2$ . Verf. beweist 2) mit Hilfe des Gebietserweiterungsprinzips des harmonischen Maßes. Unter Heranziehung des Problemkreises von Carleman-Milloux-Beurling beweist Verf. eine von Unkelbach vermutete Verschärfung von 3): 4)  $\mathfrak{G}$  beliebig und  $k = 2$ , sowie deren Erweiterung 5)  $\mathfrak{G}$  liegt auf der Riemannschen Fläche von  $\sqrt[p]{w-1}$  und  $k = 2p$ .

G. af Hällström (Åbo).

**Lelong, Pierre: Sur l'ordre d'une fonction entière de deux variables.** C. R. Acad. Sci., Paris 210, 470—472 (1940).

Verf. betrachtet das Wachstum der ganzen Funktionen  $f(x, y)$  der beiden komplexen Veränderlichen  $x$  und  $y$  auf den analytischen Ebenen  $y = \kappa \cdot x$ . In üblicher Weise wird die Ordnung  $\varrho(\kappa)$  der ganzen Funktion einer Veränderlichen, die durch  $f(x, y)$  auf einer solchen Ebene gegeben ist, definiert. Dann gilt:  $\varrho(\kappa)$  hat einen konstanten Wert  $\varrho_0$  (der endlich oder unendlich sein kann) in jedem Bereiche  $\mathfrak{B}$  der  $\kappa$ -Ebene. Doch kann es eine Ausnahmemeenge von Punkten in  $\mathfrak{B}$  geben, die aber vom Maße Null sein muß und für die auch noch gilt  $\varrho(\kappa) < \varrho_0$ . Unter den Folgerungen findet sich: Ist  $a$  ein Ausnahmewert der ganzen Funktion  $f(x, y)$  auf einer Menge analytischer Ebenen  $y = \kappa x$ , so ist die Menge dieser  $\kappa$  vom Maße Null oder  $a$  ist ein Ausnahmewert von  $f(x, y)$  im ganzen Raum. Zur Ordnung ganzer Funktionen  $f(x, y)$  siehe auch H. Kneser, S.-B. preuß. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1936, 446 (dies. Zbl. 16, 126) und Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 48, 1938, Abt. 1, 1—28 (dies. Zbl. 18, 410). Zu den Ausnahmewerten siehe P. Thullen, Math. Ann. 111, 137 (1935) (dies. Zbl. 11, 124).

Behnke (Münster i. W.).

**Behnke, H., und K. Stein: Die Sätze von Weierstrass und Mittag-Leffler auf Riemannschen Flächen.** Vjschr. naturforsch. Ges. 85, Beibl. Nr 32, 178—190 (1940).

Le but de ce travail est d'étendre les théorèmes classiques de Weierstrass et de Mittag-Leffler sur la formation de fonctions ayant des zéros ou des pôles donnés (avec leurs parties principales), aux domaines riemanniens finis, ayant un nombre fini de feuillets et sans points de ramification à l'intérieur. Les résultats sont obtenus comme cas particuliers des propositions analogues pour les fonctions de plusieurs variables qui correspondent au premier et au deuxième problème de Cousin et qui s'établissent aisément en utilisant les recherches de K. Oka. Il reste à démontrer, ce qui constitue la partie essentielle de ce Mémoire, que: 1° les surfaces de Riemann envisagées ici sont des domaines de régularité et 2° les conditions topologiques pour l'existence d'une fonction continue ayant les zéros donnés sont vérifiées pour ces surfaces (condition de K. Oka pour les domaines simples de l'espace de  $n$  variables).

S. Stoilow.

**Volovelsky, Sophie: An attempt of construction elements of functions theory in one non-commutative hypercomplex system with 3 units.** Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 143—155 u. engl. Zusammenfassung 155—157 (1940) [Russisch].